

ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΕΥΘΕΙΕΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

No 4



1. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} x + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} y + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$ και
 $\varepsilon_2 : \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} x + \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} y + \vec{\gamma} \cdot \text{προβ}_{\vec{\gamma}} \vec{\alpha} + 1 = 0,$

όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, είναι μη μηδενικά διανύσματα και ανά δύο μη συγγραμμικά.

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, είναι μοναδιαία, να εξετάσετε αν μπορεί η απόσταση των δύο ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, να είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(Απ. β) $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\sqrt{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 + (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})^2}}$, γ) δεν ισχύει)

2. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, τότε να δείξετε ότι :

α) η εξίσωση $(|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|)x + (|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| - |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|)y + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης (όταν υπάρχει) μη αρνητικό.

β) Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε η ευθεία του (α) ερωτήματος είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

γ) Αν $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ τότε η ευθεία του (α) ερωτήματος είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

δ) Όταν η ευθεία του (α) ερωτήματος διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$, τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

3. Από σημείο M της ευθείας $y = x$ φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\frac{1}{(OA)} + \frac{1}{(OB)}$ είναι σταθερό.

4. Δίνεται η εξίσωση : $(2\lambda + 1)x - (\lambda - 1)y - 3 = 0$, (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο M , του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.
 - β) Ποια από αυτές τις ευθείες απέχει τη μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων ;
 - γ) Αν η (1) τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B , να βρεθεί το λ ώστε το M να είναι το μέσο του τμήματος AB .
- (Απ. α) $M(1, 2)$, β) $\varepsilon : 3x + 6y - 15 = 0$, γ) $\lambda = 1/4$)

5. Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)y + 1 = 0$, (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να υπολογίσετε το λ έτσι ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία γραμμή.
 - β) Αν η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ να υπολογίσετε την εξίσωση της συμμετρικής της ως προς τον άξονα $x'x$.
- (Απ. α) για $\lambda \neq 1$ η (1) παριστάνει ευθεία, β) $\varepsilon : 3x - y + 1 = 0$)

6. Αν οι ευθείες με εξισώσεις
- $$2x + y - 1 = 0, \quad x - y = 5 \quad \text{και} \quad \lambda x + \lambda^2 y = -1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
- διέρχονται από το ίδιο σημείο, να υπολογίσετε τις τιμές του λ .
- (Απ. $\lambda = 1$ ή $\lambda = -1/3$)

7. Έστω η εξίσωση $(\lambda + 1)x + (1 - \lambda)y + \lambda - 3 = 0$, (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε λ .
 - β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1), περνάνε από σταθερό σημείο, το οποίο και να υπολογίσετε.
- (Απ. β) $A(1, 2)$)

8. Αφού δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 3 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, να υπολογίσετε κατόπιν το εμβαδό του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τις παραπάνω ευθείες και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- (Απ. $\varepsilon_1 : x + y - 1 = 0$, $\varepsilon_2 : x + y - 3 = 0$, σχηματίζεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $(AB\Gamma\Delta) = 4$)

9. Αν $2x^2 - y^2 + xy + 4x + y + 2 = 0$ και $-2 \leq x \leq 1$, να υπολογίσετε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, y)$.
- (Απ. Ο γ.τ. είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x + y + 1 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - y + 2 = 0$ με $-2 \leq x \leq 1$, άρα ο γ.τ. είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα)

- 10.** Θεωρούμε ένα σημείο A που ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : x - y + 1 = 0$.
Επίσης δίνεται και η ευθεία $\varepsilon' : x + 2y - 2 = 0$.
- α) Να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης από το A στην ε' .
- β) Να δείξετε ότι το συμμετρικό του A ως προς την ε' κινείται σε ευθεία.
(Απ. α) η κάθετη ευθεία $\kappa : y = 2x - x_0 + 1$, αν $A(x_0, y_0)$)
- 11.** Έστω τα σημεία $A(\alpha, 2\alpha)$, $B(\beta, 2\beta)$ όπου $\alpha \neq \beta$.
- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = 2x$.
- β) Να υπολογίσετε την εξίσωση της μεσοκαθέτου μ του τμήματος AB .
(Απ. $\mu : 2x + 4y - 5(\alpha + \beta) = 0$)
- 12.** Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο OAB με $\hat{AOB} = 90^\circ$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της πλευράς AB και ονομάζουμε M_1, M_2 τις ορθές προβολές του M πάνω στις OA, OB αντίστοιχα. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου K του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 .
(Υπ. Τοποθετήστε το τρίγωνο στους άξονες Ox, Oy με OA στον Ox και OB στον Oy και $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \alpha)$),
(Απ. ο γ.τ. του μέσου K $\zeta : x + y = \frac{\alpha}{2}$, $x > 0$, $y > 0$ δηλ. είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα P, Σ των OA, OB αντίστοιχα.)
- 13.** Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου $B(1, 2)$, $\Gamma(2, 4)$ και $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής A .
(Απ. ο γ.τ. είναι οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : y = 2x - 1$, $\varepsilon_2 : y = 2x + 1$)
- 14.** Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(\lambda, \lambda - 2)$, $B(3, -4)$ και $\Gamma(2, -5)$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι σταθερό για κάθε τιμή του λ .
(Απ. $(AB\Gamma) = 5/2$)
- 15.** Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 2x - 4$ και $\varepsilon_2 : 2y = x + 10$
(Απ. $\delta_1 : x + y - 14 = 0$ και $\delta_2 : x - y + 2 = 0$)
- 16.** Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $y = 3x + \sqrt{2}$.
Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο με συντεταγμένες ρητούς αριθμούς, το οποίο να ανήκει στην ε .
(Υπ. Κάντε χρήση της απαγωγής στο άτοπο)