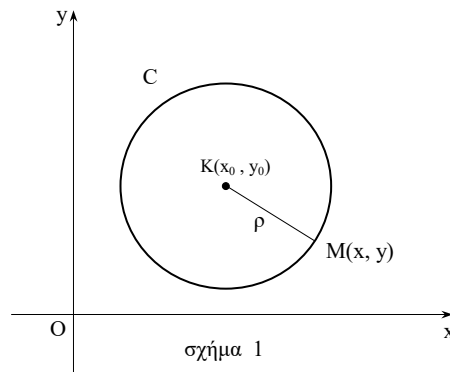


ΚΥΚΛΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ονομάζεται ο **γεωμετρικός τόπος** (γ.τ.) των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση ρ , ($\rho > 0$), από ένα συγκεκριμένο σημείο K .

Το K ονομάζεται **κέντρο** του κύκλου και ρ είναι η **ακτίνα** του.

ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ



Η **γενική μορφή** της εξίσωσης ενός κύκλου C (σχήμα 1) είναι :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \quad (1)$$

όπου $K(x_0, y_0)$ είναι το **κέντρο** του κύκλου C , ρ είναι η **ακτίνα** του και $M(x, y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο του κύκλου.

Ο τύπος (1) ισοδύναμα γίνεται :

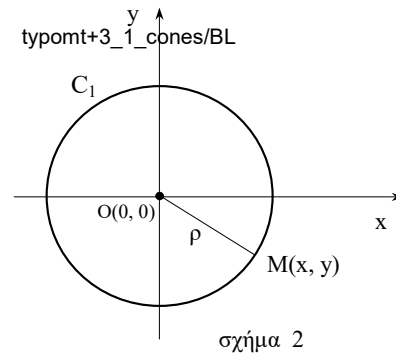
$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad (2),$$

$$\text{με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

εκφράζει επίσης κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε ο (2) παριστάνει σημείο το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, τότε ο τύπος (2) είναι αδύνατος και δεν υπάρχουν σημεία $M(x, y)$, που τον επαληθεύουν.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

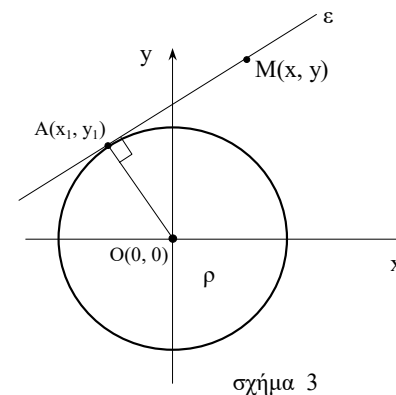


Ο κύκλος C_1 με **κέντρο την αρχή των αξόνων** $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ (σχήμα 2) έχει εξίσωση :

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad (3)$$

Αν επίσης η ακτίνα $\rho = 1$, τότε ο κύκλος ονομάζεται **μοναδιαίος**.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΚΥΚΛΟΥ



Η **εφαπτομένη ευθεία** (ϵ) του κύκλου που δίνεται από την (3) και έχει **σημείο επαφής** $A(x_1, y_1)$ με τον κύκλο, έχει εξίσωση :

$$x x_1 + y y_1 = \rho^2, \quad (4)$$

$M(x, y)$ είναι σημείο της (ϵ) και ρ η ακτίνα του αντίστοιχου κύκλου.

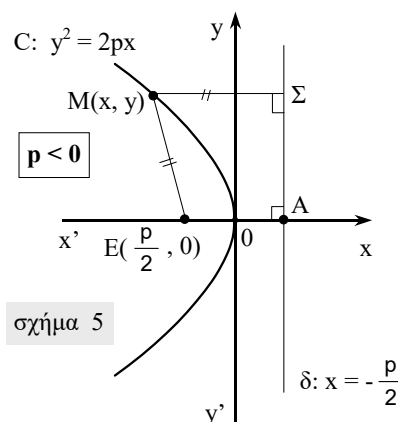
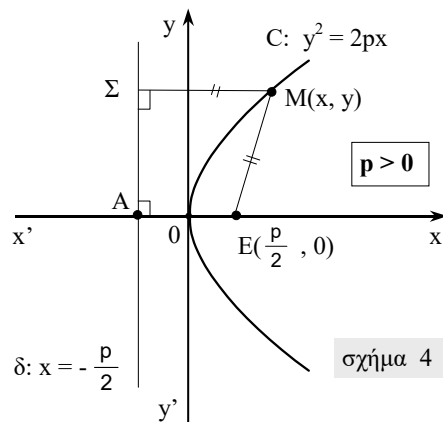
- Η **εφαπτομένη ευθεία** (ϵ) είναι **κάθετη στην ακτίνα** του κύκλου.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από μια ευθεία δ και ένα σημείο E .

Η ευθεία δ ονομάζεται **διευθετούσα** και το σημείο E **εστία** της παραβολής.

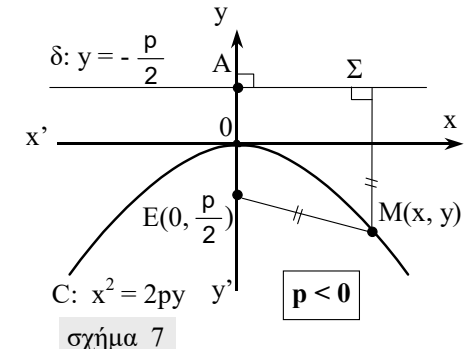
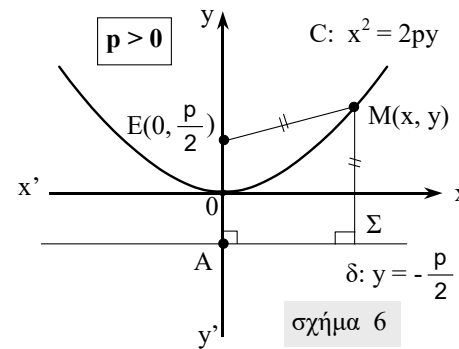
ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ



Μια παραβολή C έχει εξίσωση $C: y^2 = 2px$, (σχήμα 4, σχήμα 5), με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$. Έχουν **κορυφή** $O(0, 0)$ και **άξονα** $x'x$ (κάθετος στη διευθετούσα δ). Ισχύει $(ME) = (MS)$.

Παράμετρος της παραβολής είναι το p και $|p|$ δηλώνει την απόσταση της εστίας E από τη διευθετούσα δ .

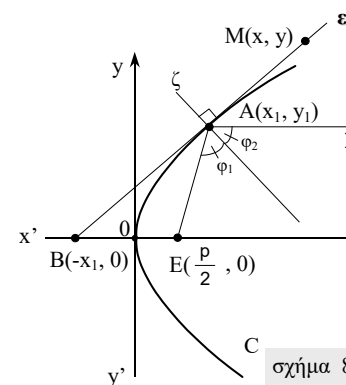
- Αν $p > 0$ τότε έχουμε την παραβολή «δεξιά» του $y'y$ άξονα (σχήμα 4)
- Αν $p < 0$ τότε έχουμε την παραβολή «αριστερά» του $y'y$ άξονα (σχήμα 5)



Μια παραβολή C έχει εξίσωση $C: x^2 = 2py$ (σχήμα 6, σχήμα 7), με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{p}{2}$. Έχουν **κορυφή** $O(0, 0)$ και **άξονα** $y'y$ (κάθετος στη διευθετούσα δ). Ισχύει $(ME) = (MS)$.

- Αν $p > 0$ τότε έχουμε την παραβολή «πάνω» από τον $x'x$ άξονα (σχήμα 6)
- Αν $p < 0$ τότε έχουμε την παραβολή «κάτω» από τον $x'x$ άξονα (σχήμα 7)

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ



Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ϵ) της παραβολής $C: y^2 = 2px$ σε σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι $\epsilon: yy_1 = p(x + x_1)$. (σχ. 8)

Αντίστοιχα, η εφαπτομένη της παραβολής $C: x^2 = 2py$ σε σημείο $A(x_1, y_1)$, θα είναι $\epsilon: xx_1 = p(y + y_1)$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

- $C: y^2 = 2px$, τα p, x είναι ομόσημα.
- Τα $M(x, y), M'(x, -y)$ ανήκουν στην παραβολή $C: y^2 = 2px$.
- Στην εφαπτομένη (ϵ) ισχύει $\phi_1 = \phi_2$ και διέρχεται και από το σημείο $B(-x_1, 0)$ (σχήμα 8). Επίσης $A\epsilon \parallel x'x$.

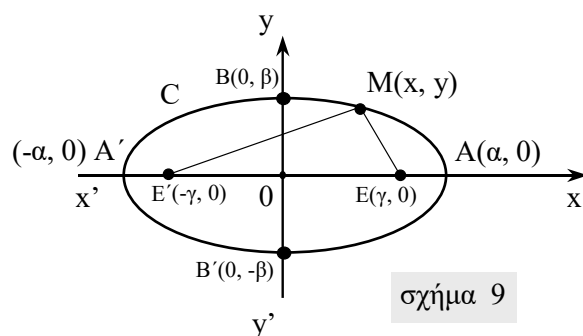
ΕΛΛΕΙΨΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερό άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο δεδομένα σημεία E και E' και μεγαλύτερο του μήκους EE' .

Δηλ. αν M σημείο του γ.τ. τότε $(ME) + (ME') = 2a$ σταθερό, $2a > (EE') = 2\gamma$.

Τα σημεία E, E' ονομάζονται **εστίες** της έλλειψης και το μήκος (EE') **εστιακή απόσταση**. Ισχύει $a > \gamma > 0$.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

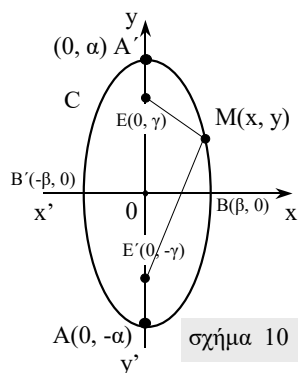


σχήμα 9

Η εξίσωση μιας έλλειψης με εστίες $E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$

$$\text{είναι } C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

όπου $b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$
και ισχύει $a > \gamma, a > b$
(σχήμα 9).



σχήμα 10

Η εξίσωση μιας έλλειψης με εστίες $E(0, \gamma), E'(0, -\gamma)$

$$\text{είναι } C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

όπου $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$ και ισχύει $a > \gamma, a > \beta$,
(σχήμα 10).

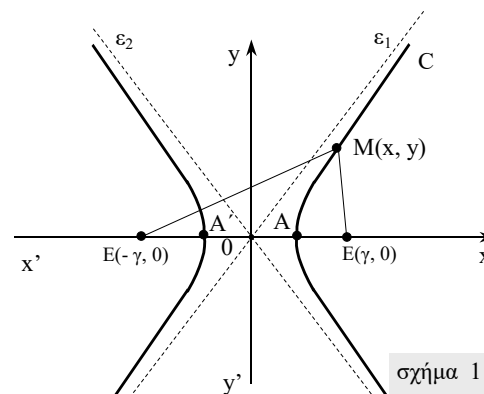
ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών τους από δύο δεδομένα σημεία E και E' είναι σταθερή και μικρότερη του μήκους EE' .

Δηλ. αν M σημείο του γ.τ. τότε $| (ME) - (ME') | = 2a$ σταθερό, $2a < (EE') = 2\gamma$.

Τα σημεία E, E' ονομάζονται **εστίες** της υπερβολής και το μήκος (EE') **εστιακή απόσταση**. Ισχύει $0 < a < \gamma$.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

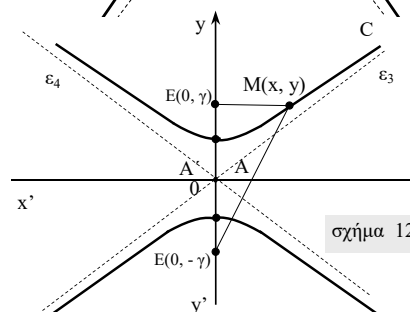


σχήμα 11

Η εξίσωση μιας υπερβολής με εστίες $E(\gamma, 0), E'(-\gamma, 0)$

$$\text{είναι } C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

όπου $b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$
και ισχύει $a < \gamma$ (σχήμα 11).

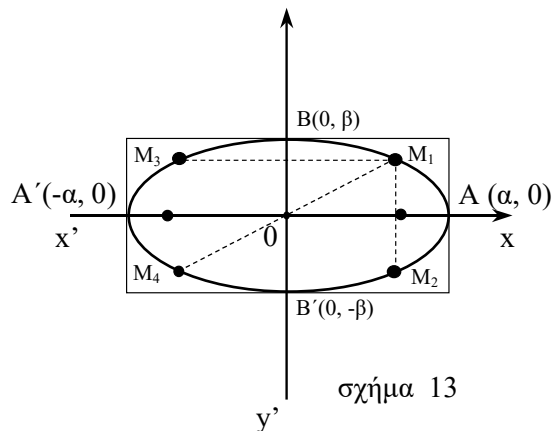


σχήμα 12

Η εξίσωση μιας υπερβολής με εστίες $E(0, \gamma), E'(0, -\gamma)$

$$\text{είναι } C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$$

όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$ και ισχύει $a < \gamma$
(σχήμα 12).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Έστω $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha > \beta$

και $\alpha > \gamma, \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$.

Ισχύουν :

- Αν $M_1(x, y)$ ανήκει στη C , τότε και τα $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, y)$ και $M_4(-x, -y)$ ανήκουν στη C .
- Τα $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$ και $B'(0, -\beta)$, ονομάζονται **κορυφές** της έλλειψης.
- $(AA') = 2\alpha$, **μεγάλος** άξονας
- $(BB') = 2\beta$, **μικρός** άξονας
- $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq \alpha^2 \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha, \text{ ομοίως } -\beta \leq y \leq \beta.$$

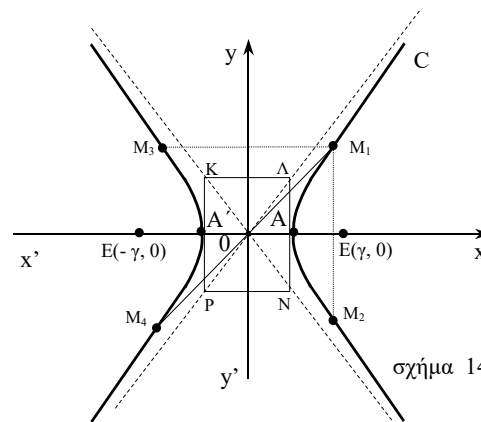
- Η έλλειψη περιέχεται σε ορθογώνιο που ορίζεται από τις ευθείες $x = \alpha$, $x = -\alpha$, $y = \beta$ και $y = -\beta$. (σχήμα 13)
- Το σημείο O ονομάζεται **κέντρο** της έλλειψης.

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Ορίζεται ως ο λόγος $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$. Ισχύει $0 < \epsilon < 1$, $\epsilon^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \epsilon^2}.$$

- Αν $\epsilon \rightarrow 0$, τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος, αφού $\beta \rightarrow \alpha$.
- Αν $\epsilon \rightarrow 1$, τότε η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα, αφού $\beta \rightarrow 0$.
- Οι ελλείψεις με ίδιες εκκεντρότητες είναι **όμοιες**.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Έστω $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \alpha < \gamma, \beta$

$= \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$.

Ισχύουν :

- Αν $M_1(x, y)$ ανήκει στη C , τότε και τα $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, y)$ και $M_4(-x, -y)$ ανήκουν στη C .
- Τα $A(\alpha, 0)$, $A'(-\alpha, 0)$, ονομάζονται **κορυφές** της υπερβολής.
- Δεν τέμνει τον y' .
- $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$

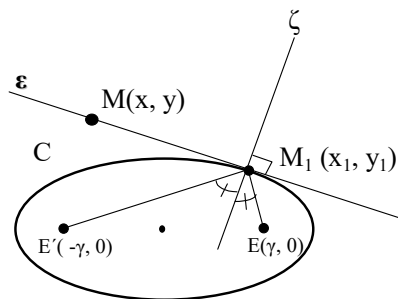
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{y^2}{\beta^2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq \alpha^2 \Leftrightarrow x \geq \alpha \text{ ή } x \leq -\alpha.$$

- Τα σημεία της υπερβολής βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $x = \alpha$ και $x = -\alpha$ και αποτελείται από **δύο κλάδους**. (σχήμα 14)
- Αν $\alpha = \beta$, τότε η υπερβολή ονομάζεται **ισοσκελής υπερβολή**.
- Ορίζεται ως **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής το ορθογώνιο ΚΛΝΡ με $K(-\alpha, \beta)$, $L(\alpha, \beta)$, $N(\alpha, -\beta)$ και $P(-\alpha, -\beta)$
- Το σημείο O ονομάζεται **κέντρο** της υπερβολής.

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Ορίζεται ως ο λόγος $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$. Ισχύει $\epsilon > 1$, $\epsilon^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\epsilon^2 - 1}$.

- Αν $\epsilon \rightarrow 1$, τότε το β μικραίνει, αφού $\beta \rightarrow 0$.
- Στην περίπτωση της **ισοσκελούς υπερβολής**, όπου $\alpha = \beta$ τότε $\epsilon = \sqrt{2}$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

σχήμα 15

Έστω $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ και $a > \gamma$,

$$b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) σε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της έλλειψης C είναι:

$$\varepsilon: \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \quad (\text{σχήμα 15})$$

- Η κάθετη ευθεία (ζ) στην εφαπτομένη ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $E'M_1E$.

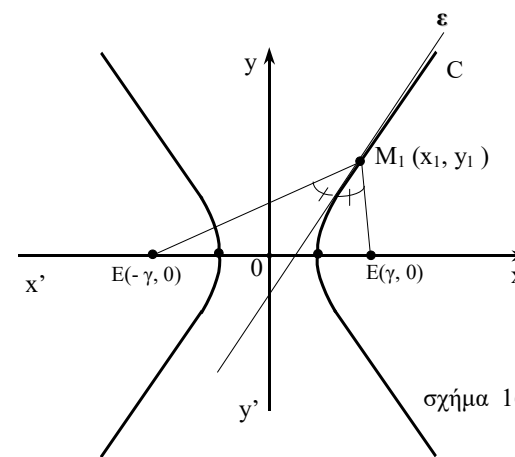
Αντίστοιχα για την έλλειψη $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ όπου $b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$ $a > \gamma$, $a > \beta$

η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) σε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της έλλειψης C

είναι: $\varepsilon: \frac{yy_1}{a^2} + \frac{xx_1}{b^2} = 1$.

Γενικά σε όλες τις εξισώσεις των εφαπτομένων των κωνικών τομών το ζεύγος (x_1, y_1) δηλώνει τις συντεταγμένες του **σημείου επαφής**, ενώ το ζεύγος (x, y) είναι οι συντεταγμένες **τυχαίου σημείου** της εφαπτομένης ευθείας.

Το **σημείο επαφής** ανήκει και στην κωνική τομή και στην εφαπτομένη ευθεία.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

σχήμα 16

Έστω $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$a < \gamma, b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) σε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της υπερβολής C είναι:

$$\varepsilon: \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

(σχήμα 16)

- Η εφαπτομένη ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $E'M_1E$.

Αντίστοιχα για την έλλειψη $C:$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ όπου}$$

$b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$ $a < \gamma$, η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) σε σημείο

$M_1(x_1, y_1)$ της υπερβολής C είναι $\varepsilon: \frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Οι ασύμπτωτες ευθείες της υπερβολής C με εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ είναι

$$\varepsilon_1: y = \frac{b}{a}x \text{ και } \varepsilon_2: y = -\frac{b}{a}x \quad (\text{σχήμα 11}).$$

Οι ασύμπτωτες ευθείες της υπερβολής C με εστίες $E(0, \gamma)$ και $E'(0, -\gamma)$ είναι

$$\varepsilon_1: y = \frac{a}{b}x \text{ και } \varepsilon_2: y = -\frac{a}{b}x \quad (\text{σχήμα 12}).$$

Οι ασύμπτωτες ευθείες αποτελούν τις διαγωνίους του ορθογωνίου βάσης (σχ.14)