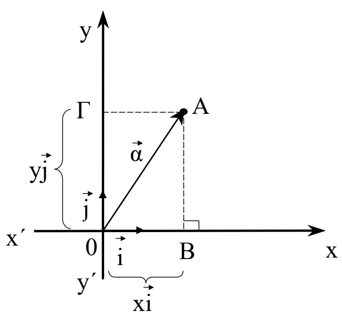
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ



σχήμα 1

<u>ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ</u>

Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{O\Gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (1) (σχήμα 1) με $x \in IR$ και $y \in IR$.

Η (1) είναι **γραμμικός συνδυασμός** του $\vec{\alpha}$ ως προς τα **μοναδιαία** διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$. (**Μοναδικός**)

$$\boxed{\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ τότε } \vec{\alpha} = (x, y)}$$

x : **τετμημένη** του $\vec{\alpha}$ και του A,
y : **τεταγμένη** του $\vec{\alpha}$ και του A.
$x\vec{i}$, $y\vec{j}$ είναι **συνιστώσες** του $\vec{\alpha}$.

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

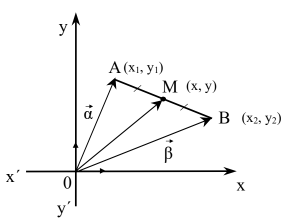
<u>ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u> είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

<u>ΠΡΟΣΘΕΣΗ</u> είναι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

<u>ΠΟΛ/ΣΙΑΣΜΟΣ</u> είναι $\lambda\vec{\alpha} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$, $\lambda \in IR$.

<u>ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ</u>

Αν AB έχει $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και μέσο $M(x, y)$, τότε $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ (σχήμα 2)



σχήμα 2

<u>ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ με ΓΝΩΣΤΑ ΑΚΡΑ</u>

Αν AB έχει $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, τότε :

$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, (σχήμα 2).

ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε ορίζεται ως **μέτρο** του : $\boxed{|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$, ή $|\vec{\alpha}| = (OA) > 0$. (βλέπε σχήμα 1).

Αν $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, τότε $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (σχήμα 2).

<u>Προσοχή !</u> Το **μέτρο** ενός διανύσματος είναι το **μήκος** του διανύσματος, δηλ. η **απόσταση** των άκρων του και φυσικά είναι **θετικός πραγματικός** αριθμός.

<u>ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u>

Δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν :

- $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$,

όπου $\lambda \in IR$, $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ η ορίζουσα των συντεταγμένων που ακολουθεί και

$\lambda_1 = \dfrac{y_1}{x_1}$, $\lambda_2 = \dfrac{y_2}{x_2}$ οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντίστοιχα, $x_1 x_2 \neq 0$.

<u>ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u> (**Ορισμός**)

- Αν $\vec{\alpha} \neq 0$, $\vec{\beta} \neq 0$, τότε εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι :

  $\boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{συνθ}}$, όπου θ η γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha} = 0$, ή $\vec{\beta} = 0$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

<u>Προσοχή !</u> Το **εσωτερικό γινόμενο** διανυσμάτων είναι **πραγματικός αριθμός**.

<u>ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u> (**Αναλυτική Έκφραση**)

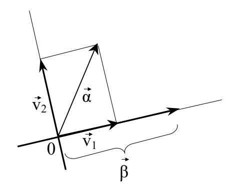
Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε : $\boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$

<u>Άμεσες συνέπειες ορισμού</u> $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρ. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\|$ Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{\beta}\|$ Είναι επίσης $\vec{\alpha}^{\,2} = \|\vec{\alpha}\|^2$	$(\lambda\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda\vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$ $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (Επιμερισ) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ $\text{συνθ} = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

Έννοιες - Ορισμοί

- **Διάνυσμα** : ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλ. τα άκρα του θεωρούνται διατεταγμένα.
- **Αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** είναι το πρώτο άκρο, ενώ **πέρας** ονομάζεται το δεύτερο άκρο του διανύσματος.
- **Μηδενικό** διάνυσμα, ονομάζεται το διάνυσμα του οποίου τα άκρα ταυτίζονται.
- **Μέτρο** ή **μήκος** διανύσματος ονομάζεται η απόσταση των άκρων του διανύσματος.
- **Μοναδιαίο** διάνυσμα ονομάζεται το διάνυσμα που έχει μέτρο 1.
- **Φορέας** διανύσματος είναι η ευθεία στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα.
- **Παράλληλα** ή **συγγραμμικά** ονομάζονται τα διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς. Τα συγγραμμικά διανύσματα έχουν την ίδια **διεύθυνση**.
- **Ομόρροπα** ονομάζονται τα διανύσματα α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία που ενώνει τις αρχές τους ή
  β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μια από τις ημιευθείες με αρχή την αρχή του ενός διανύσματος περιέχει την ημιευθεία με αρχή την αρχή του άλλου διανύσματος. Τότε τα διανύσματα έχουν την ίδια **κατεύθυνση**. ($\uparrow\uparrow$)
- **Αντίρροπα** ονομάζονται τα διανύσματα που είναι συγγραμμικά αλλά όχι ομόρροπα. ($\uparrow\downarrow$)
- **Ίσα** ονομάζονται τα ομόρροπα διανύσματα που έχουν ίσα μέτρα.
- **Αντίθετα** ονομάζονται τα διανύσματα που είναι αντίρροπα με ίσα μέτρα.
- **Γωνία θ** δύο διανυσμάτων ονομάζεται η κυρτή γωνία που σχηματίζουν δύο διανύσματα με κοινή αρχή ένα σημείο αναφοράς. $\theta = \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ με $0 \le \theta \le \pi$.
- **Ορθογώνια** ή **κάθετα** ονομάζονται τα διανύσματα που έχουν γωνία $\theta = 90^0$. (Κάθε μηδενικό διάνυσμα θεωρείται ομόρροπο ή αντίρροπο ή κάθετο σε κάθε άλλο).
- **Ιδιότητες πρόσθεσης** : (1) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ Αντιμεταθετική , (2) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ Προσεταιριστική , (3) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$, (4) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$.
- **Αφαίρεση** : $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$
- **Διάνυσμα θέσης** σημείου Μ ή **διανυσματική ακτίνα** του Μ, είναι το διάνυσμα με αρχή σταθερό σημείο Ο του χώρου (**σημείο αναφοράς**) και πέρας το σημείο Μ.
- **Μέτρο αθροίσματος** διανυσμάτων : ισχύει $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, η πρώτη ισότητα ισχύει για διανύσματα αντίρροπα, ενώ η δεύτερη για ομόρροπα.
- **Πολλαπλασιασμός αριθμού λ με διάνυσμα** συμβολίζεται με $\lambda\cdot\vec{\alpha}$ και είναι διάνυσμα το οποίο είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$, επίσης έχει μέτρο $|\lambda|\cdot|\vec{\alpha}|$.
- **Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα** : (1) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, (2) $(\lambda + \mu)\,\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$, (3) $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\,\vec{\alpha}$
- **Συνέπειες ορισμού** : (1) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, (2) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ αν $\lambda \ne 0$, (3) Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ τότε $\lambda = \mu$ αν $\vec{\alpha} \ne \vec{0}$.
- **Γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ονομάζεται διάνυσμα $\vec{\gamma}$ της μορφής $\vec{\gamma} = \kappa\,\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, με $\kappa, \lambda \in$ IR.
- **Ανάλυση διανύσματος** $\vec{\alpha}$ σε δύο **κάθετες συνιστώσες** $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ εκ των οποίων η $\vec{v}_1 /\!/ \vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta}$ δεδομένο διάνυσμα. (σχήμα 3)

  Ισχύει ότι $\vec{\alpha} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_1 = \lambda\vec{\beta}$, $\vec{v}_2\cdot\vec{\beta} = 0$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{v}_1 \Leftrightarrow \boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}}$



σχήμα 3