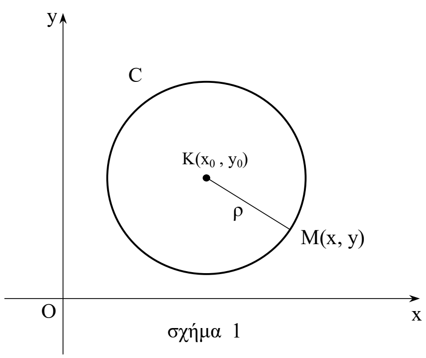
ΚΥΚΛΟΣ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> **:** Ονομάζεται ο **γεωμετρικός τόπος** (γ.τ.) των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση ρ, (ρ > 0), από ένα συγκεκριμένο σημείο Κ.

*Το **Κ** ονομάζεται **κέντρο** του κύκλου και **ρ** είναι η **ακτίνα** του.*

<u>ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ</u>



σχήμα 1

Η **γενική μορφή** της εξίσωσης ενός κύκλου C (σχήμα 1) είναι :

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \quad (1)}$$

όπου **K(x_0, y_0) είναι το κέντρου** του κύκλου C, **ρ είναι η ακτίνα** του και M(x, y) είναι ένα τυχαίο σημείο του κύκλου.

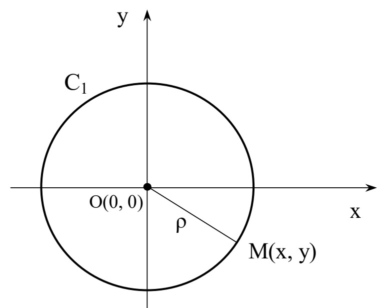
Ο τύπος (1) ισοδύναμα γίνεται :

$$\boxed{x^2 + y^2 + A x + B y + \Gamma = 0 \quad (2), \qquad \text{με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0}$$

εκφράζει επίσης κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$, $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, τότε ο (2) παριστάνει σημείο το $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right)$.
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, τότε ο τύπος (2) είναι αδύνατος και δεν υπάρχουν σημεία M(x, y), που τον επαληθεύουν.

<u>ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ</u>



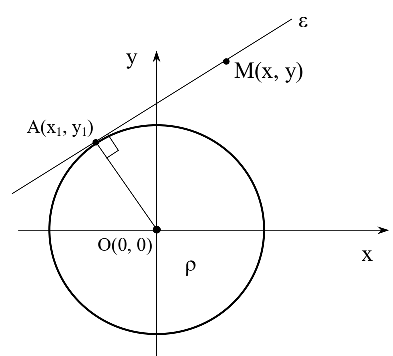
σχήμα 2

Ο κύκλος C_1 με **κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0)** και ακτίνα ρ (σχήμα 2) έχει εξίσωση :

$$\boxed{x^2 + y^2 = \rho^2 , \qquad (3)}$$

Αν επίσης η ακτίνα **ρ = 1**, τότε ο κύκλος ονομάζεται **μοναδιαίος**.

<u>ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΚΥΚΛΟΥ</u>



σχήμα 3

Η **εφαπτομένη ευθεία (ε)** του κύκλου που δίνεται από την (3) και έχει **σημείο επαφής Α (x_1, y_1)** με τον κύκλο, έχει εξίσωση :

$$\boxed{x x_1 + y y_1 = \rho^2 , \qquad (4)}$$

M(x, y) είναι σημείο της (ε) και ρ η ακτίνα του αντίστοιχου κύκλου.

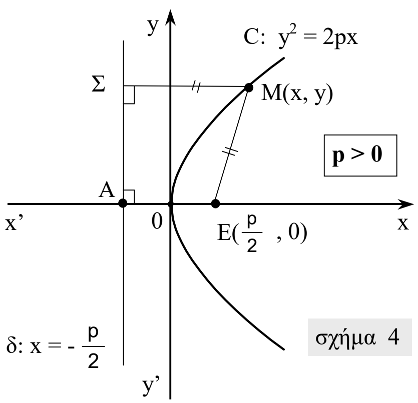
- **Η εφαπτομένη ευθεία (ε) είναι κάθετη στην ακτίνα του κύκλου.**

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

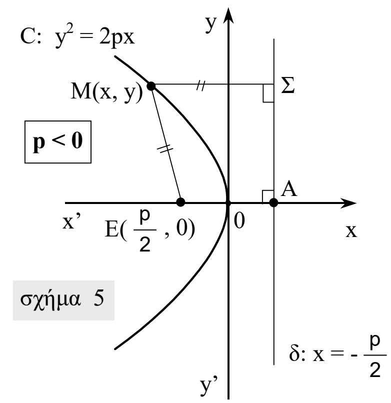
<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : Ονομάζεται ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε..

*Η ευθεία **δ** ονομάζεται **διευθετούσα** και το σημείο **Ε** **εστία** της παραβολής.*

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ</u>



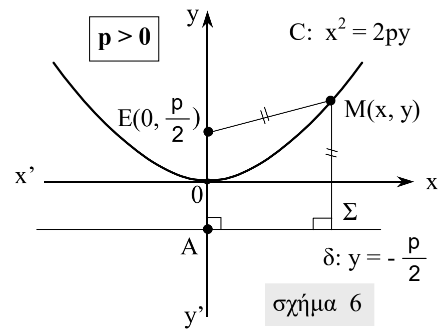
σχήμα 4



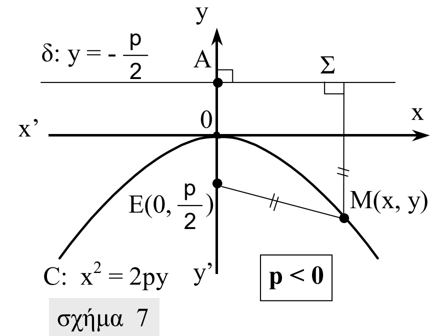
σχήμα 5

Μια παραβολή C έχει εξίσωση C : $\boxed{y^2 = 2px,}$ (σχήμα 4, σχήμα 5), με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα ευθεία δ : $x = -\frac{p}{2}$. Έχουν **κορυφή** Ο(0, 0) και **άξονα** x΄x (κάθετος στη διευθετούσα δ). Ισχύει (ΜΕ) = (ΜΣ).
Παράμετρος της παραβολής είναι το **p** και **|p|** δηλώνει την απόσταση της εστίας Ε από τη διευθετούσα δ.

- Αν $p > 0$ τότε έχουμε την παραβολή «δεξιά» του y΄y άξονα (σχήμα 4)
- Αν $p < 0$ τότε έχουμε την παραβολή «αριστερά» του y΄y άξονα (σχήμα 5)



σχήμα 6

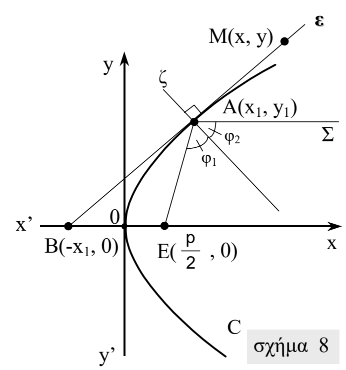


σχήμα 7

Μια παραβολή C έχει εξίσωση C : $\boxed{x^2 = 2py}$ (σχήμα 6, σχήμα 7) , με εστία $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα δ : $y = -\frac{p}{2}$. Έχουν **κορυφή** Ο(0, 0) και **άξονα y΄y** (κάθετος στη διευθετούσα δ). Ισχύει (ΜΕ) = (ΜΣ).

- Αν $p > 0$ τότε έχουμε την παραβολή «πάνω» από τον x΄x (σχήμα 6)
- Αν $p < 0$ τότε έχουμε την παραβολή «κάτω» από τον x΄x άξονα (σχήμα 7)

<u>ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ</u>



σχήμα 8

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) της παραβολής C : $y^2 = 2px$ σε σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι $\boxed{\varepsilon: yy_1 = p(x + x_1)}$. (σχ. 8)

Αντίστοιχα, η εφαπτομένη της παραβολής C : $x^2 = 2py$, σε σημείο $A(x_1, y_1)$, θα είναι $\boxed{\varepsilon: xx_1 = p(y + y_1)}$.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ</u>

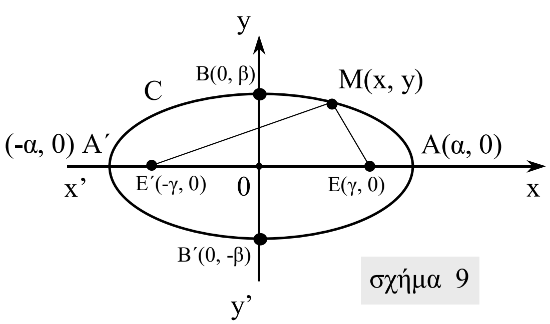
- C : $y^2 = 2px$, τα p, x είναι ομόσημα.
- Τα M(x, y), M΄(x, -y) ανήκουν στην παραβολή C : $y^2 = 2px$.
- **Στην εφαπτομένη (ε) ισχύει $\varphi_1 = \varphi_2$ και διέρχεται και από το σημείο $B(-x_1, 0)$ (σχήμα 8). Επίσης ΑΣ // x΄x.**

ΕΛΛΕΙΨΗ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : Ονομάζεται ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερό άθροισμα των αποστάσεών τους από δύο δεδομένα σημεία Ε και Ε΄ και μεγαλύτερο του μήκους ΕΕ΄.
Δηλ. αν Μ σημείο του γ.τ. τότε **(ΜΕ) + (ΜΕ΄) = 2α** σταθερό, **2α > (ΕΕ΄) = 2γ**.

*Τα σημεία **Ε, Ε΄** ονομάζονται **εστίες** της έλλειψης και το μήκος **(ΕΕ΄) εστιακή απόσταση**. Ισχύει **α > γ > 0.***

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ</u>



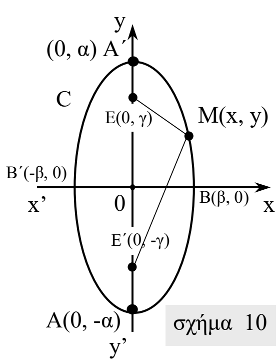
σχήμα 9

Η εξίσωση μιας έλλειψης με εστίες Ε(γ, 0), Ε΄(-γ, 0)

είναι $\boxed{C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1}$

όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$

και ισχύει α> γ , α > β (σχήμα 9).



σχήμα 10

Η εξίσωση μιας έλλειψης με εστίες Ε(0, γ) , Ε΄(0, - γ)

είναι $\boxed{C: \dfrac{y^2}{\alpha^2} + \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1}$

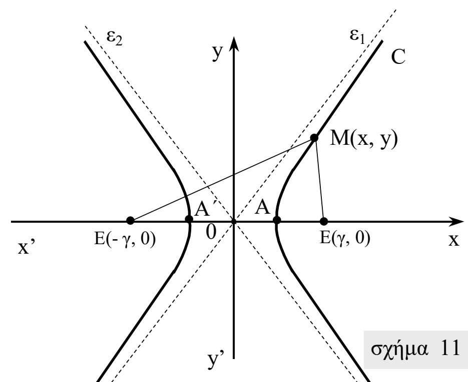
όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ και ισχύει α> γ , α > β, (σχήμα 10).

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : Ονομάζεται ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών τους από δύο δεδομένα σημεία Ε και Ε΄ είναι σταθερή και μικρότερη του μήκους ΕΕ΄.
Δηλ. αν Μ σημείο του γ.τ. τότε **I(ΜΕ) - (ΜΕ΄)I = 2α** σταθερό, **2α < (ΕΕ΄) = 2γ**.

*Τα σημεία **Ε,** Ε΄ ονομάζονται **εστίες** της υπερβολής και το μήκος **(ΕΕ΄) εστιακή απόσταση**. Ισχύει **0 < α < γ.***

<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ</u>



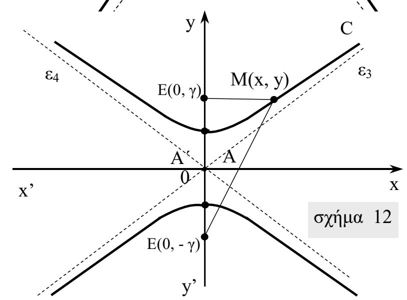
σχήμα 11

Η εξίσωση μιας υπερβολής με εστίες Ε(γ, 0), Ε΄(-γ, 0)

είναι $\boxed{C: \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1}$

όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$

και ισχύει α< γ (σχήμα 11).



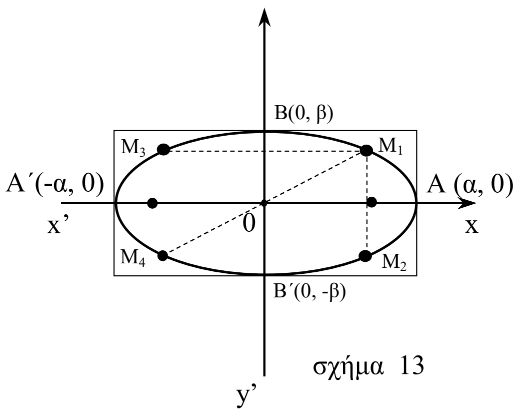
σχήμα 12

Η εξίσωση μιας υπερβολής με εστίες Ε(0, γ), Ε΄(0, - γ)

είναι $\boxed{C: \dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{x^2}{\beta^2} = 1}$

όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$ και ισχύει α< γ (σχήμα 12).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ



σχήμα 13

Έστω C : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, α>β και α>γ, β = $\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.

Ισχύουν :

- Αν $M_1(x, y)$ ανήκει στη C, τότε και τα $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, y)$ και $M_4(-x, -y)$ ανήκουν στη C.
- Τα Α(α, 0), Α΄(-α, 0), Β(0, β) και Β΄(0, -β), ονομάζονται **κορυφές** της έλλειψης.
- (ΑΑ΄) = 2α, **μεγάλος** άξονας
- (ΒΒ΄) = 2β, **μικρός** άξονας
- $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{\alpha^2}=1-\frac{y^2}{\beta^2}\le 1 \Leftrightarrow x^2\le\alpha^2 \Leftrightarrow$ **$-\alpha\le x\le\alpha$,** ομοίως **$-\beta\le y\le\beta$.**

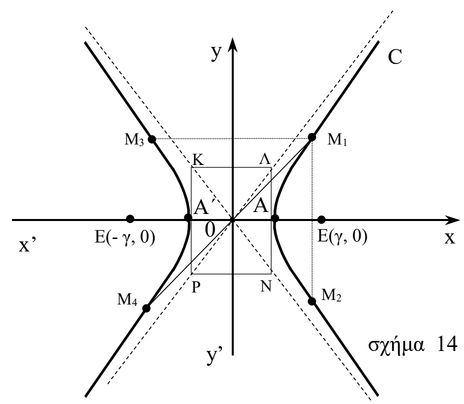
- Η έλλειψη περιέχεται σε ορθογώνιο που ορίζεται από τις ευθείες x = α, x = -α, y = β και y = -β. (σχήμα 13)
- Το σημείο Ο ονομάζεται **κέντρο** της έλλειψης.

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

Ορίζεται ως ο λόγος **ε =** $\frac{\gamma}{\alpha}$. Ισχύει **0 < ε < 1,** $\varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

- Αν $\varepsilon\to 0$, τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος, αφού $\beta\to\alpha$.
- Αν $\varepsilon\to 1$, τότε η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα, αφού $\beta\to 0$.
- Οι ελλείψεις με ίδιες εκκεντρότητες είναι **όμοιες.**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ



σχήμα 14

Έστω C : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, α<γ, β = $\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$.

Ισχύουν :

- Αν $M_1(x, y)$ ανήκει στη C, τότε και τα $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, y)$ και $M_4(-x, -y)$ ανήκουν στη C.
- Τα Α(α, 0), Α΄(-α, 0), ονομάζονται **κορυφές** της υπερβολής.
- Δεν τέμνει τον y΄y.
- $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x^2}{\alpha^2}=1+\frac{y^2}{\beta^2}\ge 1 \Leftrightarrow x^2\ge\alpha^2 \Leftrightarrow$ **$x\ge\alpha$ ή $x\le -\alpha$.**

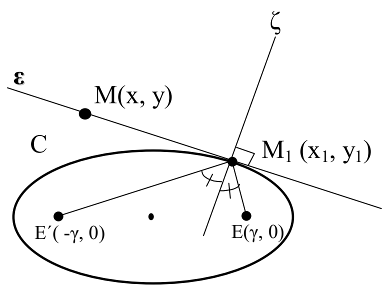
- Τα σημεία της υπερβολής βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών x = α και x = - α και αποτελείται από **δύο κλάδους**. (σχήμα 14)
- Αν **α = β**, τότε η υπερβολή ονομάζεται **ισοσκελής υπερβολή**.
- Ορίζεται ως **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής το ορθογώνιο ΚΛΝΡ με Κ(-α, β), Λ(α, β), Ν(α, -β) και Ρ(-α, -β)
- Το σημείο Ο ονομάζεται **κέντρο** της υπερβολής.

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Ορίζεται ως ο λόγος **ε =** $\frac{\gamma}{\alpha}$. Ισχύει **ε > 1 ,** $\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$.

- Αν $\varepsilon\to 1$, τότε το β μικραίνει, αφού $\beta\to 0$.
- Στην περίπτωση της **ισοσκελούς υπερβολής**, όπου α = β τότε ε = $\sqrt{2}$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ



σχήμα 15

Έστω C : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, α>β και α>γ, $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) σε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της έλλειψης C είναι :

$\boxed{\varepsilon : \frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$. (σχήμα 15)

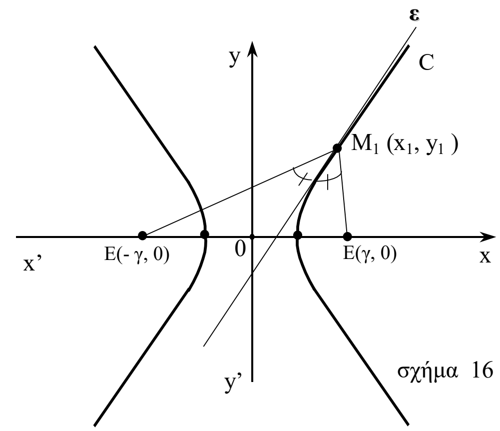
- **Η κάθετη ευθεία (ζ) στην εφαπτομένη ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $E'M_1E$.**

Αντίστοιχα για την έλλειψη C : $\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ α> γ, α > β η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) σε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της έλλειψης C είναι : $\boxed{\varepsilon : \frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$.

Γενικά σε όλες τις εξισώσεις των εφαπτομένων των κωνικών τομών το ζεύγος **(x_1, y_1)** δηλώνει τις συντεταγμένες του **σημείου επαφής**, ενώ το ζεύγος **(x, y)** είναι οι συντεταγμένες **τυχαίου σημείου** της εφαπτομένης ευθείας.

Το **σημείο επαφής** ανήκει και στην κωνική τομή και στην εφαπτομένη ευθεία

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΥΘΕΙΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ



σχήμα 16

Έστω C : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, α<γ, $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) σε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της υπερβολής C είναι :

$\boxed{\varepsilon : \frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1}$.

(σχήμα 16)

- **Η εφαπτομένη ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $E'M_1E$.**

Αντίστοιχα για την έλλειψη C : $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$ όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$ α< γ, η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) σε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της έλλειψης C είναι $\boxed{\varepsilon : \frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1}$.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Οι ασύμπτωτες ευθείες της υπερβολής C με εστίες Ε(γ, 0) και Ε΄(-γ, 0) είναι

$\boxed{\varepsilon_1 : y=\frac{\beta}{\alpha}x}$ και $\boxed{\varepsilon_2 : y=-\frac{\beta}{\alpha}x}$ (σχήμα 11).

Οι ασύμπτωτες ευθείες της υπερβολής C με εστίες Ε(0, γ) και Ε΄(0, -γ) είναι

$\boxed{\varepsilon_1 : y=\frac{\alpha}{\beta}x}$ και $\boxed{\varepsilon_2 : y=-\frac{\alpha}{\beta}x}$ (σχήμα 12).

Οι ασύμπτωτες ευθείες αποτελούν τις διαγωνίους του ορθογωνίου βάσης (σχ.14)