

Τάξη: Γ΄

Ανασκόπηση της Σχολικής Ανάλυσης

Λύσεις ασκήσεων επανάληψης

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f και να εξετάσετε, αν η f αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και τα διαστήματα στα οποία είναι $f(x) > 0$.

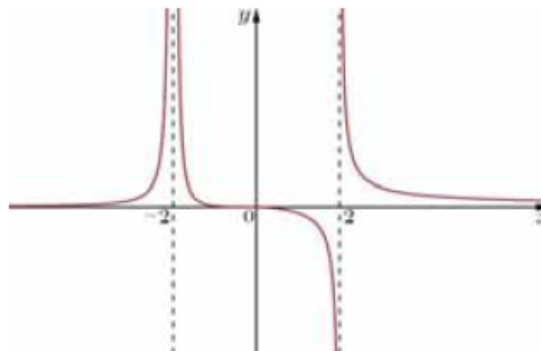
γ. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια: i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \text{ ii) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x), \text{ iii) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Για τα όρια, που δεν

υπάρχουν, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f , αν υπάρχουν.



ε. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$, ii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)}$, iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$, iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$, v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

στ. Να εξετάσετε αν εφαρμόζονται στην f τα θεωρήματα:

i) Bolzano στο $[-1, 1]$, ii) Rolle στο $[-1, 1]$.

Λύση: α. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

β. • $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. • $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

γ. i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, ii) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$, iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, iv) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$,

άρα, η f δεν έχει όριο στο 2, v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

δ. Οριζόντια ασύμπτωτη: $y = 0$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Κατακόρυφες ασύμπτωτες: $x = -2$, $x = 2$.

ε. i) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x < -2$, άρα, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. ii) Είναι $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$, άρα, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)} = 0$.

iii) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (-2, 0)$, άρα, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για

$x \in (0, 2)$, άρα, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$. Επομένως $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$, γι' αυτό η $\frac{1}{f(x)}$ δεν έχει όριο στο 0.

iv) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, άρα, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, άρα, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = 0$, επομένως

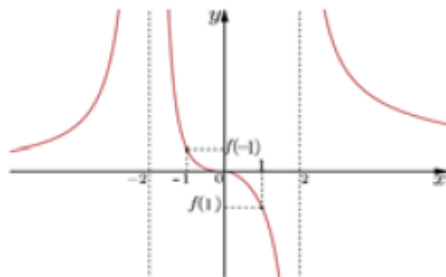
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

ν) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (2, +\infty)$, άρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

στ. i) Επειδή η C_f συνδέει τα σημεία $(-1, f(-1))$ και $(1, f(1))$ με συνεχή γραμμή, η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$. Είναι $f(-1) > 0$ και $f(1) < 0$, άρα, $f(-1)f(1) < 0$. Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στην f στο $[-1, 1]$.

ii) Δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle, γιατί παρόλο που η συνάρτηση φαίνεται να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1, 1]$, ισχύει $f(-1) \neq f(1)$.



2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{5^{x+2} + 3^{x+1}x^5}{3^x}$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ. Ποιο είναι το πλήθος και το πρόσημο των ριζών της $f(x) = 0$;

ε. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 25$.

Λύση: α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) = \frac{5^2 5^x}{3^x} + \frac{3 \cdot 3^x x^5}{3^x} = 25 \left(\frac{5}{3}\right)^x + 3x^5$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 25 \left(\frac{5}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 = 25 \cdot 0 + 3(-\infty) = -\infty,$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 25 \left(\frac{5}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5 = +\infty + 3(+\infty) = +\infty.$$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) = \left[25 \left(\frac{5}{3}\right)^x + 3x^5 \right]' = 25 \left(\frac{5}{3}\right)^x \ln \frac{5}{3} + 15x^4 > 0$.

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

γ. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, για το σύνολο τιμών της έχουμε

$$f(A) = f((-\infty, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

δ. Επειδή $0 \in f(A)$, θα υπάρχει $\rho \in A$ με $f(\rho) = 0$, έτσι η $f(x) = 0$ έχει λύση στον $\mathbb{R}$, που είναι μοναδική, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον, $f(0) = 25 \left(\frac{5}{3}\right)^0 + 3 \cdot 0^5 = 25 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Άρα, για πολύ μικρές αρνητικές τιμές του x η $f(x)$ είναι αρνητική, δηλαδή υπάρχει $x_1 < 0$ με $f(x_1) < 0$, έτσι $f(0)f(x_1) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) θα είναι συνεχής και στο $[x_1, 0]$, οπότε από το Θεώρημα Bolzano η μοναδική της ρίζα θα ανήκει στο $(x_1, 0)$, δηλαδή θα είναι αρνητική.

Σημείωση: Εδώ, αν θεωρήσουμε το διάστημα $\Delta = (-\infty, 0)$, τότε $f(\Delta) = (-\infty, 25)$. Επειδή ο αριθμός 0 περιέχεται στο $f(\Delta)$, η μοναδική ρίζα ρ της εξίσωσης περιέχεται στο Δ , δηλαδή είναι αρνητική.

ε. Είναι: $f(x) > 25 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$ (αφού η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, • $f'(x)(f(x) - x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, • $f(0) = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της f^{-1} .

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Λύση: α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f'(x)(f(x) - x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x)f(x) - xf'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x)f(x) = xf'(x) + f(x)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2} \right)' = (xf'(x))' \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = xf(x) + c, (1) \quad \text{Για } x = 0, \text{ η (1) γίνεται } \frac{f^2(0)}{2} = 0f(0) + c \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 0 + c \Leftrightarrow \frac{1}{2} = c$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν, } \frac{f^2(x)}{2} = xf(x) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f^2(x) = 2xf(x) + 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 1 \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = f(x) - x$, που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ (είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) και της x .

Από την (2) προκύπτει ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $p \in \mathbb{R}$ ώστε

$g(p) = 0$, οδηγούμαστε στο άτοπο $p^2 + 1 = 0$. Επιπλέον, $g(0) = 1 > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως,

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$\beta. \bullet \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι: } f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)' = 1 + \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} > \frac{\sqrt{x^2} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{|x| + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0$$

(αφού $-|x| \leq x \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Έτσι, $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, γι' αυτό είναι 1-1, άρα, αντιστρέφεται.

- Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f . $A = (-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε: $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$.

Έτσι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $(0, +\infty)$. Για τον τύπο της f^{-1} , θέτουμε $y = f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1} \text{ με } (y - x \geq 1, (1)) \Leftrightarrow (y - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2xy = y^2 - 1 \text{ με } (y \neq 0) \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y}, \text{ που επαληθεύει και την (1). Άρα, } f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}, x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

γ. • Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, έτσι η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

- Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, θα αναζητήσουμε, αν υπάρχει, πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1 + \sqrt{1 + 0} = 2.$$

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0. \text{ Έτσι η } y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = 2x \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty \end{aligned}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, • $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x > 0$, • $f'(1) = 0$, $f(1) = e$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$. β. Να μελετήσετε και να σχεδιάσετε τη C_f .

α. Για κάθε $x > 0$ είναι $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + c_1, (1). \text{ Είναι: } f'(1) = 0 \Leftrightarrow e^1 - \frac{1}{1} e^1 + c_1 = 0 \Leftrightarrow 0 = e - e + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f'(x) = \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)' \Leftrightarrow f(x) = x e^{\frac{1}{x}} + c (2).$$

Για $x=1$ η σχέση (2) δίνει $f(1) = 1 \cdot e^1 + c \Leftrightarrow e = e + c \Leftrightarrow 0 = c$. (2) $\Leftrightarrow f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

β. 1° Πεδίο ορισμού: $A = (0, +\infty)$.

2° Συνέχεια: Η f είναι συνεχής στο $A = (0, +\infty)$, ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $x, e^{\frac{1}{x}}$ (είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $e^x, \frac{1}{x}$).

3° Μονοτονία - Ακρότατα - Κυρτότητα - Σημεία Καμπής:

Για κάθε $x > 0$, έχουμε: $f'(x) = f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$\epsilon \lambda \acute{\alpha} \chi \iota \sigma \tau \acute{o}$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και έχει ελάχιστη τιμή $f(1) = e$. Για κάθε $x > 0$, είναι $f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} > 0$, άρα, η f είναι κυρτή στο A και η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

4° Συμπεριφορά στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού - Ασύμπτωτες:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) \text{ (είναι της μορφής } 0 \cdot (+\infty)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \text{ (είναι της μορφής } \frac{+\infty}{+\infty})$$

$$\stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty. \text{ (Θέσαμε } y = \frac{1}{x}, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{y \rightarrow 0} e^y = +\infty \cdot e^0 = +\infty.$$

(Θέσαμε $y = \frac{1}{x}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.)

- Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

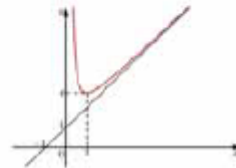
$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1.$$

$$\begin{aligned}\beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x e^{\frac{1}{x}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \left(\text{είναι της μορφής } \frac{0}{0} \right) \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.\end{aligned}$$

Άρα, η $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5^ο Πίνακας Μεταβολής - Γραφική Παράσταση:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$
$f(x)$			



5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \sqrt{x}, x > 0$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη και $3x - 1 \geq 2\ln x + 2\sqrt{x}, x > 0$.

Λύση: α. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$.

β. $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

γ. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$, οπότε, η f είναι κοίλη στο $A = (0, +\infty)$, άρα,

$$f(x) \leq \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x + \sqrt{x} \leq \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\ln x + 2\sqrt{x} \leq 3x - 1, x > 0.$$

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, • $f(2) = 2$, • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 3x} = 3$, • $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$.

Να αποδείξετε ότι: α. $f(0) = 0$ και $f'(0) = 9$,

β. η f' έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, 2)$

γ. υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$,

δ. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

Λύση: α. Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu 3x} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\eta\mu 3x$ με $\eta\mu 3x \neq 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$.

- Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως και στο $x_0 = 0$, έτσι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x)\eta\mu 3x) = 3 \cdot 0 = 0.$$

- Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\eta\mu 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \cdot 3 = 9.$$

β. Αν η f' είχε δύο ρίζες στο $(0, 2)$, τότε από το Θεώρημα Rolle, η f' θα είχε ρίζα στο $(0, 2)$, άτοπο, γιατί $f'(x) \neq 0$ για $x \in (0, 2)$, επομένως, η f' έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, 2)$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x - 2$, που είναι συνεχής στο $[0, 2]$ με $h(0) = -2 < 0$ και $h(2) = f(2) + 2 - 2 = 2 > 0$, έτσι $h(2) = f(2) + 2 - 2 = 2 > 0$, οπότε, από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + \xi - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2 - \xi$.

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στα $[0, \xi]$, $[\xi, 2]$, οπότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα υπάρχουν $\xi_1 \in (0, \xi)$ και $\xi_2 \in (\xi, 2)$, με

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \frac{2 - \xi}{\xi} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(\xi)}{2 - \xi} = \frac{2 - (2 - \xi)}{2 - \xi} = \frac{\xi}{2 - \xi}.$$

Έτσι,

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{2 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{2 - \xi} = 1.$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

- Υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 f'(x_1) = f(x_1)$ και ότι η εφαπτόμενη της C_f στο $M(x_1, f(x_1))$ περνάει από την αρχή των αξόνων,
- Εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη $g(x) = e^{\frac{1}{x}} f(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ με $k \neq 0$ και υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $k f'(x_2) + f(x_2) = 0$,

β. Αν επιπλέον η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) , να αποδείξετε ότι:

- $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$,
- υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Λύση: α. i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = \frac{f(x)}{x}$, που είναι

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων,
- παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\phi'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$.
- $\phi(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0 = \frac{f(\beta)}{\beta} = \phi(\beta)$.

Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη ϕ στο $[\alpha, \beta]$, γι' αυτό θα υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε: } \phi'(x_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 f'(x_1) - f(x_1)}{x_1^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 f'(x_1) = f(x_1). \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(x_1, f(x_1))$ είναι: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ η οποία επαληθεύεται για $y = x = 0$ λόγω της (1). Επομένως η εφαπτόμενη αυτή περνάει από την αρχή των αξόνων.

ii) Για τη g ισχύουν:

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} f(x) + e^{\frac{1}{x}} f'(x)$
- $g(\alpha) = e^{\frac{1}{\alpha}} f(\alpha) = e^{\frac{1}{\alpha}} \cdot 0 = 0$ και $g(\beta) = e^{\frac{1}{\beta}} f(\beta) = e^{\frac{1}{\beta}} \cdot 0 = 0$ άρα $g(\alpha) = g(\beta)$.

Επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g στο $[\alpha, \beta]$, οπότε θα υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \beta)$ με:

$$g'(x_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} e^{\frac{1}{x_2}} f(x_2) + e^{\frac{1}{x_2}} f'(x_2) = 0 \Leftrightarrow k f'(x_2) + f(x_2) = 0$$

β. i) Αν δεν ίσχυε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα υπήρχε $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) \geq 0$. Από το Θ.Μ.Τ. για την f στα $[\alpha, \xi]$ και $[\xi, \beta]$ έχουμε:

- $f'(\xi_1) = \frac{f(\xi) - f(\alpha)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha}$ με $\alpha < \xi_1 < \xi$,
- $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\xi)}{\beta - \xi} = \frac{-f(\xi)}{\beta - \xi}$ με $\xi < \xi_2 < \beta$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) και $\xi_1 < \xi_2$, έχουμε: $f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} < \frac{-f(\xi)}{\beta - \xi}$

Αν ήταν $f(\xi) = 0$, τότε από τη σχέση (2) προκύπτει $0 < 0$, άτοπο.

- Αν ήταν $f(\xi) > 0$, τότε από τη σχέση (2) έχουμε: $\frac{1}{\xi - \alpha} < \frac{-1}{\beta - \xi} \Leftrightarrow \beta - \xi < -\xi + \alpha \Leftrightarrow \beta < \alpha$, άτοπο.

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

ii) Επειδή εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = 0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) , το x_0 είναι μοναδικό.

Για $x \in (\alpha, x_0)$ είναι $f'(x) < f'(x_0) = 0$.

Για $x \in (x_0, \beta)$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Έτσι έχουμε τον διπλανό πίνακα.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 .

x	α	x_0	β
$f'(x)$		0	
$f(x)$			

Ο.Ε.

8. Όταν κοιτάζουμε μια φωτεινή πηγή της οποίας η φωτεινότητα $x(x > 0)$ αυξάνεται, το μάτι μας αντιδρά μειώνοντας το εμβαδόν E της κόρης του, σύμφωνα με τον πειραματικό νόμο:

$$E(x) = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}, \text{ όπου το } E \text{ το μετράμε σε } \text{mm}^2 \text{ και το } x \text{ σε ανάλογες μονάδες φωτεινότητας.}$$

α. Να αποδείξετε ότι το E μειώνεται καθώς το x αυξάνεται.

β. Να αποδείξετε ότι ενώ, το E μειώνεται συνεχώς καθώς το x αυξάνεται δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από ένα σταθερό αριθμό.

γ. Να εξετάσετε κατά πόσον ο ρυθμός μεταβολής του E αυξάνεται ή μειώνεται καθώς το x αυξάνεται.

δ. Να βρείτε τη μέγιστη ή και την ελάχιστη τιμή του E , αν υπάρχουν.

ε. Ποια είναι η γραφική παράσταση του E ως συνάρτηση του x ;

Λύση: α. Για κάθε $x > 0$, έχουμε $E(x) = 8 \frac{5 + 3x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$, έτσι

$$E'(x) = 8 \frac{(5 + 3x^{0.4})'(1 + 4x^{0.4}) - (5 + 3x^{0.4})(1 + 4x^{0.4})'}{(1 + 4x^{0.4})^2} = \frac{-54,4x^{-0.6}}{(1 + 4x^{0.4})^2} < 0$$

Επομένως η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, γι' αυτό όσο αυξάνεται το x (η φωτεινότητα της πηγής) τόσο μειώνεται το $E(x)$ (το εμβαδόν της κόρης του ματιού).

β. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}} = \frac{40 + 24 \cdot 0}{1 + 4 \cdot 0} = 40$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{0.4} \left(\frac{40}{x^{0.4}} + 24 \right)}{x^{0.4} \left(\frac{1}{x^{0.4}} + 4 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{40}{x^{0.4}} + 24}{\frac{1}{x^{0.4}} + 4} = \frac{0 + 24}{0 + 4} = \frac{24}{4} = 6$$

Επειδή η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$, είναι $E((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) \right) = (6, 40)$

Έτσι, $E(x) > 6$ για κάθε $x > 0$.

γ. Για κάθε $x > 0$ είναι $E'(x) = -54,4 \left(\frac{x^{-0.6}}{(1 + 4x^{0.4})^2} \right) = 54,4 \frac{0,6x^{-1.6} + 5,6x^{-1.2}}{(1 + 4x^{0.4})^3} > 0$.

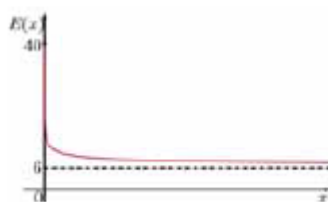
Αρα, η $E'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$, γι' αυτό ο ρυθμός μεταβολής της $E(x)$ αυξάνεται καθώς το x αυξάνεται.

δ. Στο υποερώτημα (β.), δείξαμε ότι $E(A) = (6, 40)$, οπότε η $E(x)$ δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

ε. • Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = 6$, η ευθεία $y = 6$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $E(x)$.

Από τα προηγούμενα ερωτήματα, έχουμε τον πίνακα μεταβολής και τη γραφική παράσταση.

x	0	$+\infty$
$E'(x)$		-
$E''(x)$		+
$E(x)$		



9. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ δύο πλοία Π_1 και Π_2 απέχουν από το λιμάνι Λ αποστάσεις 200 μίλια και 100 μίλια αντίστοιχα. Το Π_1 κατευθύνεται προς το λιμάνι με ταχύτητα $v_1 = 20$ μίλια / ώρα, το Π_2 απομακρύνεται από το λιμάνι με ταχύτητα $v_2 = 10$ μίλια / ώρα. Οι πορείες των πλοίων είναι ευθύγραμμα, όπως φαίνεται στο σχήμα και σχηματίζουν γωνία 60° .

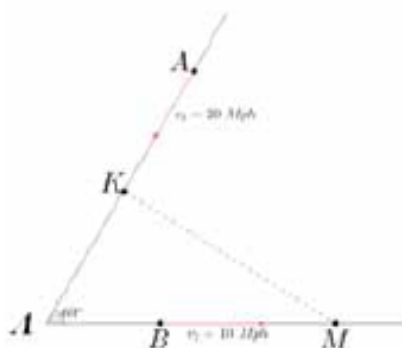
α. Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, 10]$, η

απόσταση των πλοίων είναι: $d(t) = 10\sqrt{7t^2 - 60t + 300}$ μίλια.

β. Ποια χρονική στιγμή η απόσταση των πλοίων γίνεται ελάχιστη;

γ. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ h, η απόσταση των πλοίων μειώνεται και με ποιο ρυθμό;

δ. Να σχεδιάσετε πρόχειρα την απόσταση των πλοίων ως συνάρτηση του χρόνου.



Λύση: α. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t \in [0, 10]$ τα πλοία

βρίσκονται στις θέσεις: K και M , αντίστοιχα. Είναι: $(KA) = 200 - 20t$, $(MA) = 100 + 10t$, οπότε από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο KAM έχουμε: $KM^2 = KA^2 + MA^2 - 2KA \cdot MA \cdot \sin 60^\circ = (200 - 20t)^2 + (100 + 10t)^2 - (200 - 20t)(100 + 10t) = 100(7t^2 - 60t + 300)$

Άρα, $d(t) = 10\sqrt{7t^2 - 60t + 300}$, $t \in [0, 10]$.

β. $d'(t) = \frac{10(14t - 60)}{2\sqrt{7t^2 - 60t + 300}}$ και $d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{30}{7} \approx 4,3$ h.

x	0	$\frac{30}{7}$	10
$d'(t)$		-	+
$d(t)$		↙	↗

Το πρόσημο της παραγώγου, η μονοτονία της συνάρτησης και το ακρότατο, φαίνονται στον δυτλανό πίνακα.

γ. $d'(2) = -\frac{160}{\sqrt{208}}$. Η απόσταση των πλοίων τη χρονική στιγμή $t = 2$ h ελαττώνεται

με ρυθμό $\frac{160}{\sqrt{208}} \approx 11$ μίλια / h.

δ. $d(0) = 10\sqrt{300} = 100\sqrt{3} \approx 173$. $d(10) = 200$. $d\left(\frac{30}{7}\right) \approx 13$.

Παρατήρηση: Η γραφική παράσταση της d είναι τμήμα υπερβολής.

Βιβλιογραφία:

1. Τ. Apostol, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, τόμος I, Ατλαντίς – Μ. Πεχλιβανίδης & Σια, Αθήνα.
2. Π. Βλάμος, Ανάλυση (3 τόμοι), «V», Αθήνα 1997.
3. Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, τόμος I: Συμμετρία, 1997.
4. Σ. Ντούγιας, Απειροστικός Λογισμός, τόμος I, Leader Book, Αθήνα 2003.
5. Μ. Τουμάσης, Γ. Τσαπακίδης, 200 Επαναληπτικά Θέματα Μαθηματικών Γ' Λυκείου, Σαββάλας, Αθήνα, 2006.
6. Μ. Τουμάσης, Γ. Τσαπακίδης, Θέματα Μαθηματικών Γ' Λυκείου Γενικής Παιδείας, Σαββάλας, Αθήνα, 2007.
7. Thomas, Απειροστικός Λογισμός, τόμος I, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2005.
8. Γ. Τσαπακίδης Αναλύοντας την Ανάλυση, Εκδόσεις Μαυρίδη, Θεσσαλονίκη, 2017.

