

Τάξη: Γ'

Επαναληπτικές Ασκήσεις Ανάλυσης

1. Έστω $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $(x+1)^2 f'(x) + x = 0$

α. Να βρείτε τον τύπο της.

Έστω $f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$, $x > -1$

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονotonία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha < 0$ η εξίσωση

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -\alpha + \ln \frac{ex}{(x+1)^2}$$

έχει μοναδική θετική ρίζα.

δ. Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα.

ε. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\xi \in (0, 1)$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

ΛΥΣΗ

α. Για κάθε $x > -1$ έχουμε:

$$f'(x) = -\frac{x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{x+1-1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(-\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \right)'$$

$$\Rightarrow f(x) = -\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + c$$

Επιπλέον, $f(0) = 0$, οπότε: $c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$

Άρα

$$f(x) = -\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1), x > -1$$

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της

$$\text{με } f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = -\frac{x}{(x+1)^2}$$

απ' όπου, εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = [-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$.

Σε ότι αφορά στα ακρότατα, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$.

Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με $f(0) = 0$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} \left(1 - \frac{x+1}{x} \ln(x+1) \right) = -\infty$$

Διότι $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x \cdot \frac{1}{x+1} \right) = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x} \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{x}{x+1}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{(x+1)^2}} = 0$$

Επιπλέον, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \right) = -\infty$

Επίσης η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στα Δ_1, Δ_2 . Επομένως,

$$f(\Delta_1) = [-\infty, 0] \text{ και } f(\Delta_2) = (-\infty, 0]$$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(\Delta_1 \cup \Delta_2) = (-\infty, 0]$$

γ. Η εξίσωση ορίζεται μόνο όταν $x > 0$. Με αυτόν τον περιορισμό, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -\alpha + \ln \frac{ex}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} - \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) = -\alpha + \ln(ex) - \ln(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \ln \frac{x+1}{x} = \ln e + \ln x - \ln(x+1)^2 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x = 1 + \ln x - 2\ln(x+1) - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

Επειδή $\alpha < 0$, ο αριθμός α περιέχεται στο $f(\Delta_2) = (-\infty, 0]$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει λύση στο Δ_2 .

Η λύση της εξίσωσης δεν είναι ο αριθμός 0, αφού $f(0)=0$, οπότε είναι θετικός αριθμός.

Τέλος, λόγω της μονοτονίας της f στο Δ_2 , η λύση είναι μοναδική.

8. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \left(\frac{x}{(x+1)^2} \right)' = -\frac{(x+1)^2 - 2(x+1)x}{(x+1)^4} \\ = -\frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$ και κοίλη στο $[-1, 1]$.

9. Έστω ξ τυχαίος αριθμός του διαστήματος $(0, 1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - xf'(\xi), \quad x \in [0, 1]$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με

$$g'(x) = f'(x) - f'(\xi)$$

και επειδή η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0, 1]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό, οπότε:

- Αν $0 < x < \xi$ τότε $f'(x) > f'(\xi) \Rightarrow g'(x) > 0$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \xi]$.

- Αν $\xi < x < 1$ τότε $f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow g'(x) < 0$

οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\xi, 1]$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=\xi$, οπότε για κάθε $x \neq \xi$ ισχύει $g(x) < g(\xi)$.

Έστω τώρα M ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς $g(0), g(1)$.

Για οποιοδήποτε αριθμό κ που περιέχεται στο διάστημα $[M, g(\xi))$, προφανώς ισχύει

$$\kappa \in g([0, \xi]) \text{ και } \kappa \in g([\xi, 1])$$

οπότε υπάρχουν $x_1 \in [0, \xi]$ και $x_2 \in [\xi, 1]$ ώστε $g(x_1) = \kappa = g(x_2)$. Έτσι, έχουμε:

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) - x_1 f'(\xi) = f(x_2) - x_2 f'(\xi) \\ \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = x_1 f'(\xi) - x_2 f'(\xi) \\ \Rightarrow (x_1 - x_2) f'(\xi) = f(x_1) - f(x_2) \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

που είναι το ζητούμενο.

2. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις ώστε

- Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη
- $f(0)=1, f'(0)=-1$
- $f^2(x) + f'(x)f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = -x^2 - ex + 1$

α. Να αποδείξετε ότι

i. $f'(x) = -f(x)$

ii. $f(x) = e^{-x}$

β. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν δυο μόνο κοινά σημεία με τετμημένες $-1, 0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{f(x) + f(x+1) + f(x+2)}{e^2 + e + 1} = \frac{1}{e^2}$$

δ. Να αποδείξετε ότι αν για κάποια παραγωγίσιμη συνάρτηση h ισχύει

$$h'(x) = (g(x)h'(x) + h(x))e^x$$

τότε η h είναι σταθερή στο διάστημα $[-1, 0]$.

ΛΥΣΗ

α. i. Είναι:

$$f^2(x) + f'(x)f''(x) = 0 \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + 3(f'(x))^2 f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left[(f(x))^3 \right]' = \left[(-f'(x))^3 \right]' \Rightarrow (f(x))^3 = (-f'(x))^3 + c$$

απ' όπου, με δεδομένο ότι $f(0)=1$ και $f'(0)=-1$,

βρίσκουμε $c=0$. Άρα,

$$(f(x))^3 = (-f'(x))^3 \Rightarrow f'(x) = -f(x)$$

ii. Με $f'(x) = -f(x)$, έχουμε:

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = 0 \Rightarrow (e^x f(x))' = 0 \Rightarrow e^x f(x) = c_1$$

Επιπλέον, $f(0)=1$, οπότε $e^0 = c_1 \Rightarrow c_1 = 1$.

Άρα, $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -x^2 - ex + 1$ προσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης $e^{-x} + x^2 + ex - 1 = 0$.

Προφανώς οι αριθμοί -1 και 0 είναι λύσεις της εξίσωσης.

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη λύση. Έστω ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ (φυσικά οι δυο από αυτές είναι οι αριθμοί $-1, 0$).

Τότε σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ ισχύουν για την $\varphi(x) = e^{-x} + x^2 + ex - 1$ οι υποθέσεις για την εφαρμογή του Θ. Rolle, οπότε υπάρχουν $\rho_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\rho_2 \in (\beta, \gamma)$ ώστε $\varphi'(\rho_1) = 0 = \varphi'(\rho_2)$.

Αν τώρα εφαρμόσουμε το Θ. Rolle για την

$$\varphi'(x) = -e^{-x} + 2x + e$$

στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ με $\varphi''(\rho) = 0$, που είναι άτοπο αφού $\varphi''(x) = e^{-x} + 2 > 0$.

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μόνο δυο λύσεις, τους αριθμούς -1 και 0 , οπότε οι C_1, C_2 έχουν δυο μόνο κοινά σημεία με τετμημένες $-1, 0$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t(x) = f(x) + f(x+1) + f(x+2), x \in \mathbb{R}$$

Η t είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$t'(x) = f'(x) + f'(x+1) + f'(x+2) < 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f'(x) < 0$.

Άρα η t είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Επιπλέον, } \frac{f(x) + f(x+1) + f(x+2)}{e^2 + e + 1} = \frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(x+1) + f(x+2) = \frac{e^2 + e + 1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(x+1) + f(x+2) = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f(x+1) + f(x+2) = f(0) + f(1) + f(2)$$

$$\Leftrightarrow t(x) = t(0) \Leftrightarrow x = 0$$

δ. Είναι:

$$h'(x) = (g(x)h'(x) + h(x))e^x \Leftrightarrow$$

$$h'(x)e^{-x} = g(x)h'(x) + h(x) \Leftrightarrow h'(x)(g(x)e^{-x}) - h(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$h'(x)\varphi(x) - h(x) = 0, (1) \text{ με } \varphi(-1) = \varphi(0) = 0, \text{ οπότε } h(-1) = h(0) = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση h δεν είναι σταθερή στο κλειστό διάστημα $[-1, 0]$, τότε η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της θα είναι διαφορετική από τις τιμές της στα σημεία $-1, 0$, οπότε υπάρχει x_0 που περιέχεται στο διάστημα $(-1, 0)$ ώστε η $h(x_0)$ να είναι ακρότατη τιμή της $h(x)$ και $h(x_0) \neq 0$. Τότε όμως απ' το Θ. Fermat θα

είναι $h'(x_0) = 0$ και από την (1) παίρνουμε $h(x_0) = 0$ που αποκλείεται. Άρα η συνάρτηση h είναι σταθερή στο διάστημα $[-1, 0]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{x-1} - \ln x + 1, x > 0 \text{ και η παραβολή}$$

$$y = -(x-1)^2, x \in \mathbb{R}.$$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e^{x-1} + 1 = e^2 + \ln \frac{ex}{3}$$

γ. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 2) \eta \mu \frac{f(x)}{x-1}$$

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{\eta \mu x - 2}{x-2}$$

έχει ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

ε. Μετακινούμε την παραβολή κατακόρυφα, λ μονάδες προς τα πάνω. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η C , και η παραβολή τέμνονται σε δυο σημεία.

ΛΥΣΗ

α. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

$$\text{με } f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \text{ και } f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2}$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης $f'(1) = 0$, οπότε έχουμε:

- Αν $x \in (0, 1)$ τότε $f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$.
- Αν $x \in (1, +\infty)$ τότε $f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$ οπότε η f είναι και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $f(1) = 1 + 1 = 2$.

Επιπλέον, η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Τέλος, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x-1} - \ln x + 1) = +\infty \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - \ln x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{x-1} \left(1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} + \frac{1}{e^{x-1}} \right) \right] = +\infty \end{aligned}$$

διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = 0$$

Έτσι, σε συνδυασμό με τη μονοτονία της συνεχούς συνάρτησης f στα Δ_1, Δ_2 συμπεραίνουμε ότι $f(\Delta_1) = [2, +\infty)$ και $f(\Delta_2) = [2, +\infty)$

οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[2, +\infty)$.

β. Με $x > 0$ έχουμε: $e^{x-1} + 1 = e^2 + \ln x + 1 - \ln 3 \Leftrightarrow e^{x-1} - \ln x + 1 = e^2 - \ln 3 + 1 \Leftrightarrow f(x) = f(3)$

Αν $x \geq 1$ τότε η f είναι «1-1» οπότε

$$f(x) = f(3) \Leftrightarrow x = 3$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει μια ακόμα ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Επειδή ο αριθμός $f(3)$ περιέχεται στο διάστημα $f(\Delta_2)$ θα περιέχεται και στο $f(\Delta_1)$ που ταυτίζεται μ' αυτό, οπότε η $f(x) = f(3)$ έχει λύση και στο Δ_1 . Επιπλέον είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 , οπότε η ρίζα είναι μοναδική στο διάστημα Δ_1 .

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει ακριβώς δυο ρίζες.

γ. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 2) = f(1) - 2 = 0$ και $\left| \eta \mu \frac{f(x)}{x-1} \right| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \text{οπότε } \left| (f(x) - 2) \eta \mu \frac{f(x)}{x-1} \right| &\leq |f(x) - 2| \\ \Rightarrow -|f(x) - 2| &\leq (f(x) - 2) \eta \mu \frac{f(x)}{x-1} \leq |f(x) - 2| \end{aligned}$$

$$\text{Επιπλέον, } \lim_{x \rightarrow 1} (-(f(x) - 2)) = \lim_{x \rightarrow 1} |f(x) - 2| = 0$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 2) \eta \mu \frac{f(x)}{x-1} = 0$

δ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$(x-2)(f(x)-1) - (x-1)(\eta \mu x - 2) = 0, \quad (1)$$

έχει ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (x-2)(f(x)-1) - (x-1)(\eta \mu x - 2), \quad 1 \leq x \leq 2$$

Η g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και

$$\bullet \quad g(1) = -1(f(1)-1) - (2-1) = -1 < 0$$

• $g(2) = -1(\eta \mu 2 - 2) > 0$, διότι για κάθε $x > 0$ από την $|\eta \mu x| < |x|$ συμπεραίνουμε ότι

$$|\eta \mu x| < x \Rightarrow -x < \eta \mu x < x \Rightarrow \eta \mu x - x < 0$$

Διαφορετικά: $\eta \mu 2 < 1 < 2 \Rightarrow \eta \mu 2 - 2 < 0$

Άρα, εφαρμόζεται για την g το Θ. Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$, δηλαδή η (1) έχει ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

ε. Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $f(x) = -(x-1)^2 + \lambda$ έχει δυο ρίζες. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$e^{x-1} - \ln x + 1 + (x-1)^2 = \lambda, \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = e^{x-1} - \ln x + 1 + (x-1)^2, \quad x > 0.$$

Η h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} + 2(x-1) \text{ και } h''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} + 2$$

Επειδή $h''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επίσης $h'(1) = 0$, οπότε έχουμε: Αν $x \in (0, 1)$ τότε

$$h'(x) < h'(1) \Rightarrow h'(x) < 0$$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1)$ ενώ αν $x > 1$ τότε

$$h'(x) > h'(1) \Rightarrow h'(x) > 0$$

και η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $h(1) = 1 + 1 = 2$

$$\text{Επιπλέον, } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty, \quad h(1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

οπότε, σε συνδυασμό και με τη συνέχεια της f παίρνουμε $h(\Delta_1) = [2, +\infty)$ και $h(\Delta_2) = [2, +\infty)$.

Επομένως, για οποιοδήποτε λ με $\lambda > 2$ η εξίσωση (2) έχει ακριβώς μια λύση σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς δυο λύσεις.

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν

$$\bullet \quad f'(x) = 2x(1-f(x)) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad f(0) = 0$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να προσδιορίσετε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e^{x^2} - e^x \cdot e^{x^2} = 1$$

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την $x=2$, αν $g(x) = xf(x)$

ε. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{f(x)}}$

ΛΥΣΗ

α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)e^{x^2} - e^x = -1$ ή αρκεί: $(f(x)-1)e^{x^2} = -1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = (f(x)-1)e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)e^{x^2} + 2x(f(x)-1)e^{x^2} \\ &= 2x(1-f(x))e^{x^2} + 2x(f(x)-1)e^{x^2} \\ &= 2x(1-f(x)+f(x)-1)e^{x^2} = 0 \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $h(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$, οπότε $(f(0)-1)e^0 = c \Rightarrow c = -1$

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} h(x) &= -1 \Rightarrow (f(x)-1)e^{x^2} = -1 \\ \Rightarrow f(x)-1 &= -e^{-x^2} \Rightarrow f(x) = 1 - e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

β. Είναι: $f'(x) = 2xe^{-x^2}$ και

$$f''(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = 2(1-2x^2)e^{-x^2}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=0$.

Επιπλέον,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

απ' όπου εύκολα συμπεραίνουμε ότι η f είναι

κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και το $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ και κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x^2}) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x^2}) = 1$$

οπότε, αν $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και $\Delta_2 = [0, +\infty)$ τότε λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της f παίρνουμε: $f(\Delta_1) = f(\Delta_2) = [0, 1]$.

Άρα

$$f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1 \cup \Delta_2) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, 1]$$

γ. Είναι:

$$\begin{aligned} e^{x^2} - e^x e^{x^2} &= 1 \Leftrightarrow 1 - e^x = e^{-x^2} \Leftrightarrow -e^x = -1 + e^{-x^2} \\ \Leftrightarrow 1 - e^{-x^2} &= e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $\alpha < 0$, τότε $e^\alpha \in (0, 1) \subseteq [0, 1]$ δηλαδή $e^\alpha \in f(\Delta_1)$ και $e^\alpha \in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση έχει από μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 .
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $e^\alpha \geq 1$ οπότε ο αριθμός e^α δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f , άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ. Επειδή για κάθε $x \geq 0$ έχουμε $g(x) = xf(x) \geq 0$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 (x - xe^{-x^2}) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 + e^{-x^2})' dx \\ &= \frac{1}{2} [x^2 + e^{-x^2}]_0^2 = \frac{1}{2} (4 + e^{-4} - 0 - 1) = \frac{1}{2} (e^{-4} + 3) \end{aligned}$$

ε. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{1 - e^{-x^2}}, \quad x > 0$$

Προφανώς

$$\frac{x}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{\varphi(x)}$$

αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1 - e^{-x^2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{2xe^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-x^2}} = 1$$

Έτσι έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{f(x)}} = 1$$

5. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 1$
- $(f(x) - e^{-x})(f'(x) + e^{-x}) = 0$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

β. Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την g^{-1} .

γ. Αν $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $h(x) = f(h(x) - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

- Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της h .
- Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε το $h(1)$ και να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 1$ ισχύει:

$$\alpha - \frac{3}{\alpha} + 2 < \int_1^{\alpha} \frac{4h(x)}{\alpha} dx < 2\alpha - \frac{2}{\alpha}$$

ΛΥΣΗ

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = f(x) - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (f(x) - e^{-x})(f'(x) + e^{-x}) &= 0 \Rightarrow (f(x) - e^{-x})(f(x) - e^{-x})' = 0 \\ \Rightarrow F(x)F'(x) &= 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}F^2(x)\right)' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}F^2(x) = c \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(f(x) - e^{-x})^2 &= c \end{aligned}$$

και $f(0) - e^0 = 1 - 1 = 0$, οπότε $c = 0$

Άρα $f(x) - e^{-x} = 0$, οπότε $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Είναι:

$$g(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$$

Αναζητούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση $g(x) = y$, έχει ως προς x , πραγματική ρίζα.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2y &= e^{-x} - e^x \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{e^x} - e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{ή } e^x = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1}. \quad (1)$$

Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται διότι για κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + 1} &> \sqrt{y^2} = |y| \Rightarrow -\sqrt{y^2 + 1} < -|y| \\ \Rightarrow y - \sqrt{y^2 + 1} &< y - |y| \leq 0 \end{aligned}$$

και $e^x > 0$. Έτσι, έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

οπότε για κάθε $y \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x) = y$, έχει ως προς x , μια πραγματική ρίζα.

Άρα, η g αντιστρέφεται και $g^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

γ. i. Είναι:

$$h(x) = e^{-(h(x) - x)} \Rightarrow h(x) = e^{x - h(x)}$$

και

$$e^{x - h(x)} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $h(x) > 0$.

ii. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{x - h(x)}(1 - h'(x)) \Rightarrow h'(x) = h(x)(1 - h'(x)) \\ \Rightarrow h'(x) &= h(x) - h(x)h'(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 + h(x))h'(x) = h(x) \Rightarrow h'(x) = \frac{h(x)}{1 + h(x)} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Έστω $h(1) = \beta$, $\beta > 0$. Τότε έχουμε:

$$\beta = e^{1 - \beta} \Leftrightarrow \beta e^{\beta} - e = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = xe^x - e$, $x > 0$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = (x + 1)e^x > 0$$

οπότε είναι γνησίως αύξουσα και κατά συνέπεια «1-1». Επιπλέον, $\varphi(1) = 0$, οπότε ο αριθμός 1 είναι η μοναδική ρίζα της. Άρα $\beta = h(1) = 1$.

Αν στην γνωστή ανισότητα $\ln x \leq x - 1$ θέσουμε e^x στο x , έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Rightarrow x \leq e^x - 1 \Rightarrow e^x \geq x + 1$$

οπότε

$$h(x) = e^{x - h(x)} \geq x - h(x) + 1 \Rightarrow 2h(x) \geq x + 1 \Rightarrow h(x) \geq \frac{x + 1}{2}$$

Επίσης, αν $H(x) = h(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$H'(x) = \frac{h(x)}{1 + h(x)} - 1 = \frac{h(x) - 1 - h(x)}{1 + h(x)} = -\frac{1}{1 + h(x)} < 0$$

οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.
Επιπλέον, $H(1)=0$, οπότε για κάθε $x>1$ έχουμε

$$h(x) < H(1) \Rightarrow H(x) < 0 \Rightarrow h(x) < x$$

Τώρα, για την απόδειξη της

$$\alpha - \frac{3}{\alpha} + 2 < \int_1^{\alpha} \frac{4h(x)}{\alpha} dx < 2\alpha - \frac{2}{\alpha}$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha^2 + 2\alpha - 3 < \int_1^{\alpha} 4h(x) dx < 2(\alpha^2 - 1)$$

ή αρκεί

$$\frac{\alpha^2 + 2\alpha - 3}{4} < \int_1^{\alpha} h(t) dt < \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)$$

Αλλά,

$$\frac{x+1}{2} \leq h(x) < x$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_1^{\alpha} (x+1) dx &< \int_1^{\alpha} h(t) dt < \int_1^{\alpha} t dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_1^{\alpha} < \int_1^{\alpha} h(x) dx < \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^{\alpha} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{2} + \alpha - \frac{1}{2} - 1 \right) < \int_1^{\alpha} h(x) dx < \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{2} + \alpha - \frac{3}{2} \right) < \int_1^{\alpha} h(x) dx < \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) \\ &\Rightarrow \frac{\alpha^2 + 2\alpha - 3}{4} < \int_1^{\alpha} h(x) dx < \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

6. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν

- $xf(x^2) = 2f(x)$ για κάθε $x > 0$
- $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 4)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

β. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq x_0$, να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 .

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > f(2)$.

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον αριθμό ℓ .

ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha > 1$ ώστε $\alpha^2 f'(\alpha) + \ln \alpha = 1$

στ. Αν επιπλέον για κάθε $x > 0$ ισχύει $xf(x) + x^4 f'(x^2) + \ln x = 1$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ΛΥΣΗ

α. Η δοσμένη ισότητα για $x=2$, γράφεται:

$$2f(4) = 2f(2) \Rightarrow f(4) = f(2)$$

επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2, 4]$ οπότε απ' το Θ. Rolle προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 4)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

β. Από τη δοσμένη ισότητα, με παραγώγιση των μελών της, έχουμε:

$$f(x^2) + 2x^2 f'(x^2) = 2f'(x), \quad (1)$$

Η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0, x_0)$ και $(x_0, +\infty)$

Η (1) με $x = x_0$, γράφεται:

$$f(x_0^2) + 2x_0^2 f'(x_0^2) = 2f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0^2) = -\frac{f(x_0^2)}{2x_0^2} < 0$$

αφού

$$x_0 > 1 \Rightarrow x_0^2 > 1 \Rightarrow f(x_0^2) > 0$$

οπότε $f'(x_0^2) < 0$, με $x_0^2 > x_0$

Άρα για κάθε

έχουμε $f'(x) < 0$ οπότε η f , που είναι συνεχής και στο x_0 , είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$.

Η (1) με $x = \sqrt{x_0}$, γράφεται:

$$f(x_0) + 2x_0 f'(x_0) = 2f'(\sqrt{x_0}) \Rightarrow f'(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$$

αφού

$$x_0 > 1 \Rightarrow f(x_0) > 0$$

οπότε $f'(\sqrt{x_0}) > 0$. Επιπλέον,

$$x_0 > 1 \Rightarrow \sqrt{x_0} < x_0$$

οπότε $\sqrt{x_0} \in (0, x_0)$

Άρα για κάθε $x < x_0$ έχουμε $f'(x) > 0$, οπότε η f , που είναι συνεχής και στο x_0 , είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, x_0]$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = x_0$.

γ. Θα λύσουμε την ανίσωση χωριστά σε κάθε διάστημα μονοτονίας της.

- Λύση στο διάστημα $(0, x_0]$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, x_0]$, οπότε στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f(x) > f(2) \Leftrightarrow 2 < x \leq x_0$$

Άρα κάθε αριθμός του διαστήματος $(2, x_0]$ είναι λύση της ανίσωσης.

- Λύση στο διάστημα $[x_0, +\infty)$

Επειδή $f(2) = f(4)$ η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x) > f(4)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$, οπότε στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f(x) > f(4) \Leftrightarrow x_0 \leq x < 4$$

Άρα κάθε αριθμός του διαστήματος $[x_0, 4)$ είναι λύση της ανίσωσης.

Επομένως, η δοσμένη ανίσωση έχει ως λύση, κάθε αριθμό του διαστήματος $(2, 4)$.

δ. Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$. Τότε από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x^2)) = 2\ell$$

και αν θέσουμε $x = u^2$, τότε $(x \rightarrow +\infty \Rightarrow u^2 \rightarrow +\infty)$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u^2) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{u} \cdot uf(u^2) \right\} = 2\ell \cdot 0 = 0$$

Άρα, $\ell = 0$.

ε. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2, 4]$ με

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ και}$$

$$g(4) = f(4) - \frac{\ln 4}{4} = f(2) - \frac{\ln 2^2}{4} = f(2) - \frac{\ln 2}{2} = g(2)$$

οπότε απ' το Θ. Rolle, υπάρχει $a \in (2, 4)$ (προφανώς $a > 1$) ώστε $g'(a) = 0$ και

$$g'(a) = 0 \Rightarrow f'(a) - \frac{1 - \ln a}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2 f'(a) + \ln a = 1$$

που είναι το ζητούμενο.

στ. Για κάθε $x > 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} xf(x) + x^4 f'(x^2) + \ln x &= 1 \\ \Rightarrow f(x) + x^3 f'(x^2) &= \frac{1 - \ln x}{x} \\ \Rightarrow \frac{xf(x^2)}{2} + x^3 f'(x^2) &= \frac{1 - \ln x}{x} \Rightarrow f(x^2) + 2x^2 f'(x^2) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ \Rightarrow 2f'(x) &= 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + c$$

και $f(1) = 0$ οπότε $c = 0$. Επομένως,

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

Εναλλακτική λύση για το ερώτημα (β).

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(0, x_0]$ και $[x_0, +\infty)$ και η παράγωγός της δεν μηδενίζεται σε κανένα εσωτερικό σημείο τους. Επιπλέον η f' είναι συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο εσωτερικό αυτών.

Άρα η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(0, x_0]$ και $[x_0, +\infty)$.

Αλλά, $f(1) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, x_0]$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[x_0, +\infty)$. Τότε θα ήταν γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε $f(2) < f(4)$, άτοπο.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει ακρότατο (ολικό μέγιστο) στο x_0 .