

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Ισχύει $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ Α Ψ

Α. Από ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος (Θ.Ι, σελ. 214). Βέβαια στην εκφώνηση η άσκηση πρέπει να σημειώνει ότι οι f, g είναι συνεχείς.

2. Ισχύει $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$ Α Ψ

Προφανώς **Ψ**. Αντιπαράδειγμα : αν $\int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^e x dx \cdot \int_1^e \frac{1}{x} dx \dots$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

3. Αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_a^b f(x)dx = 0$. Α Ψ

Προφανώς **Α**. Από άμεσες συνέπειες ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος, σελ. 212.

4. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

A

Ψ

Ψ. Είναι $\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = -1 + 1 = 0$, αλλά $\eta\mu x \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

5. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

A

Ψ

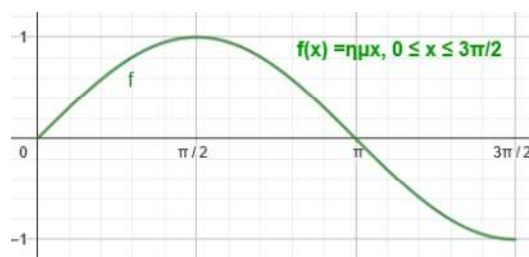
A. Από άμεσες συνέπειες ορισμένου ολοκληρώματος, σελ. 212, με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

6. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

A

Ψ

Ψ. Είναι $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu 0 = 0 + 1 = 1 \geq 0$, αλλά $\eta\mu x \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, ενώ $\eta\mu x \leq 0$ για κάθε $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

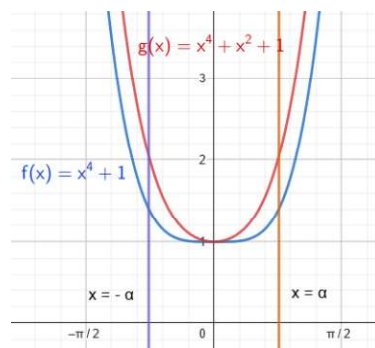


7. $\int_{-a}^a (x^4 + 1)dx < \int_{-a}^a (x^4 + x^2 + 1)dx$, για κάθε $a > 0$.

A

Ψ

Είναι $\int_{-a}^a (x^4 + 1 - x^4 - x^2 - 1) dx < 0 \Rightarrow - \int_{-a}^a x^2 dx < 0$
 $\Rightarrow - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a < 0 \Rightarrow - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{(-a)^3}{3} \right) < 0 \Rightarrow - \frac{2a^3}{3} < 0 \Rightarrow a^3 > 0 \Rightarrow a > 0$, που ισχύει, άρα A.



$$8. \int_0^{\pi/4} \ln(1 - \eta \mu^2 x) dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sigma \nu \eta x dx. \quad \text{A} \quad \Psi$$

Είναι $\int_0^{\pi/4} \ln(1 - \eta \mu^2 x) dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\sigma \nu \eta^2 x) dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln(\sigma \nu \eta x) dx$, αφού $\sigma \nu \eta x > 0$, για κάθε $x \in [0, \pi/4]$. Άρα **A**.

$$10. \int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt. \quad \text{A} \quad \Psi$$

Ισχύει ότι :

$$\int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt = \int_e^1 (\ln 1 - \ln t) dt = - \int_e^1 \ln t dt = \int_1^e \ln t dt.$$

Άρα **A**.

$$13. \text{Αν } \int_a^b f(x) dx = 0 \text{ και η } f \text{ δεν είναι παντού μηδέν στο } [a, b], \text{ τότε η } f \text{ παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.} \quad \text{A} \quad \Psi$$

A. Γιατί αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx > 0$, από ΘΙΙΙ, σελ. 214,

ιδιοτήτων ορισμένου ολοκληρώματος.

Ομοίως αν $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx < 0$.

Και στις δύο περιπτώσεις άτοπο.

$$14. \text{Το ολοκλήρωμα } \int_{-1}^1 (x^3 - x) dx \text{ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης } f(x) = x^3 - x \text{ και τον άξονα των } x. \quad \text{A} \quad \Psi$$

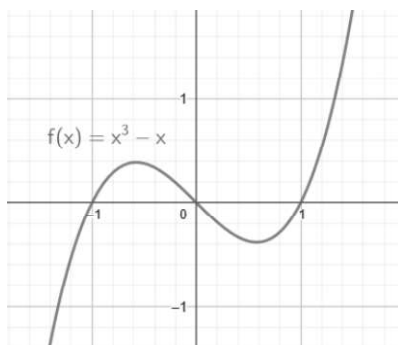
Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = 1$.

Στον διπλανό πίνακα, βλέπουμε τα πρόσημα της f στο $[-1, 1]$.

Είναι $f(x) \geq 0$, $x \in [-1, 0]$, ενώ $f(x) \leq 0$, $x \in [0, 1]$, οπότε **Ψ**.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-		-		+
$x^2 - 1$	+		0		+
$f(x)$	-		0		+

... στην επόμενη σελίδα βλέπουμε και την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία :



... άρα το σωστό θα ήταν να υπολογίσουμε το

$$\int_{-1}^1 |x^3 - x| dx, \text{ για το εμβαδό του χωρίου, μεταξύ}$$

της C_f και του $x'x$.

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν $f'(x) = \eta\mu\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

A) $-\frac{1}{\pi}$,

B) $\frac{1}{\pi}$,

Γ) $-\frac{2}{\pi}$,

Δ) $\frac{2}{\pi}$.

$$\text{Είναι } \int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 \eta\mu\pi x dx = f(1) - f(0) \Rightarrow -\frac{1}{\pi} (\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\pi} (-1 - 1) = f(1) \Rightarrow f(1) = \frac{2}{\pi}, \text{ άρα η επιλογή Δ.}$$

4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx$ είναι ίσο με

A) $\frac{4}{3}$,

B) 0,

Γ) $-\frac{4}{3}$,

Δ) $\frac{2}{3}$,

Ε) $\frac{5}{3}$.

Είναι $x^2 - 1 < 0$, για κάθε $x \in [-1, 1]$, οπότε $|x^2 - 1| = 1 - x^2$, κατά συνέπεια

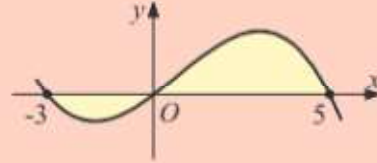
$$\int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3},$$

άρα η επιλογή Α.

7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με.

A) $\int_{-3}^5 f(x)dx$,

B) $\int_5^{-3} f(x)dx$.



Γ) $\int_{-3}^0 f(x)dx - \int_0^5 f(x)dx$, Δ) $-\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx$.

Είναι $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in [-3, 0]$, ενώ $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 5]$, άρα :

$$E = \int_{-3}^5 |f(x)| dx = \int_{-3}^0 (-f(x)) dx + \int_0^5 (f(x)) dx = \Delta.$$

8. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = g(0) + 2$, τότε για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει:

A) $f(x) = g(x) - 2$,

B) $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = 4$.

Γ) $f(x) \leq g(x)$, $x \in [-1, 1]$

Δ) Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1, 1]$.

Είναι $f'(x) = g'(x)$, από πόρ. συν. Θ.Μ.Τ., θα είναι $f(x) = g(x) + c$, για $x = 0$, $f(0) = g(0) + c \Rightarrow g(0) + 2 = g(0) + c \Rightarrow c = 2$, άρα $f(x) = g(x) + 2$, (1), άρα η Α επιλογή είναι **λάθος**.

Επίσης $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-1}^1 2 dx = 2(1 - (-1)) = 4$, οπότε η επιλογή **Β**, είναι **σωστή**.

Αν επίσης ίσχυε η Γ, θα ήταν $f(x) \leq g(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} g(x) + 2 \leq g(x) \Leftrightarrow 2 \leq 0$, άτοπο και αν ίσχυε η Δ, τότε θα είχαμε $f(x) = g(x)$, για $x \in [-1, 1]$, δηλ. από (1), $g(x) + 2 = g(x) \Leftrightarrow 2 = 0$, άτοπο επίσης.

10. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

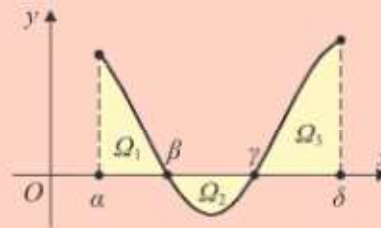
Αν

$E(\Omega_1) = 2, E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$

τότε το $\int_a^\delta f(x) dx$ είναι ίσο με

A) 6, B) -4, Γ) 4,

Δ) 0, Ε) 2.



Είναι $\int_a^\delta f(x) dx = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = 2 - 1 + 3 = 4$, δηλ. η επιλογή **Γ**.

III.

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

A) $\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx,$

B) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx,$

Γ) $\int_0^{\pi} \epsilon\phi x dx$

Δ) $\int_0^1 \ln x dx,$

E) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2} dx,$

Z) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx.$

Το A δεν είναι καλώς ορισμένο γιατί για $x = 1$, δεν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{1}{x-1}$.

Το B είναι, αφού για κάθε $x \in [0, \pi/2]$, το $\eta\mu x$ είναι ορισμένη και συνεχής.

Το Γ δεν είναι αφού για $x = \pi/2$, η $\epsilon\phi x$ δεν ορίζεται και ομοίως το Δ δεν είναι, αφού για $x=0$, δεν ορίζεται το $\ln x$.

Το E, επίσης δεν είναι, αφού για $x = 2$, δεν ορίζεται η $\sqrt{1-x^2}$.

Τέλος η $\frac{1}{x+1}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0, 1]$.

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$$

$$= -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du = -I. \text{ (Θέσαμε } x = \frac{1}{u} \text{ οπότε } dx = -\frac{1}{u^2} du).$$

Άρα $I = -I$ οπότε $I = 0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx > 0,$$

επειδή $\frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Στην αντικατάσταση $x = \frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{1}{x}$, που είναι **λάθος** αφού η συνάρτηση u δεν ορίζεται για $x = 0$, καθώς από το ολοκλήρωμα I $x \in [-1, 1]$.