

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^+$ Α Ψ

β) $(f \circ g)(x) = -x, x \in \mathbb{R}$ Α Ψ

α) Για να ορίζεται η $g \circ f$, θα πρέπει να υπάρχει το $A = \{x \in D_f \text{ με } f(x) \in D_g\}$
δηλ. $\{x > 0 \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\}$, οπότε $A = (0, +\infty)$, άρα η α) είναι **Ψ**.

β) Για να ορίζεται η $f \circ g$, θα πρέπει να υπάρχει το $B = \{x \in D_g \text{ με } g(x) \in D_f\}$
δηλ. $\{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^{-x} > 0\}$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $B = \mathbb{R}$,
άρα ορίζεται η $f \circ g$ με $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{-x}) = \ln e^{-x} = -x, x \in \mathbb{R}$,
οπότε η β) είναι **Α**.

2. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Α Ψ

Θέτοντας $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$, κοντά στο 1, με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l, l \in \mathbb{R}$,

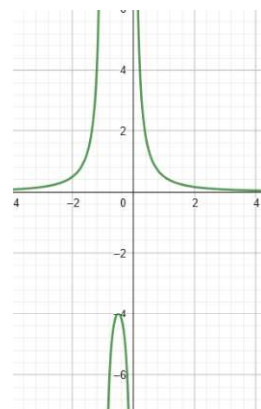
Οπότε $f(x) = g(x)(x-1)$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x-1)] = l \cdot 0 = 0$,

συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ και η πρόταση είναι **Α**.

$$3. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0.$$

A Ψ

Η πρόταση είναι **Ψ**. Δεν υπάρχει το όριο της $\frac{1}{x^2 + x}$ στο 0, της οποίας τη γραφική παράσταση βλέπουμε στο διπλανό σχήμα.



$$4. \text{ Αν } f(x) > 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ τότε κατ' ανάγκη } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1.$$

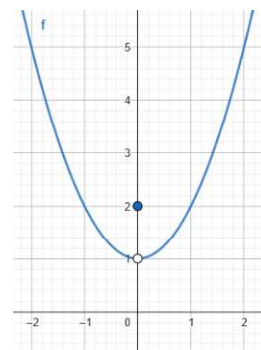
A Ψ

Η πρόταση είναι **Ψ**. Πράγματι έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}, \text{ ισχύει ότι } f(x) > 1, \text{ για κάθε } x \neq 0$$

και $f(x) = 2 > 1$, για $x = 0$, άρα $f(x) > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Βλέπουμε τη γεωμετρική ερμηνεία του αντιπαράδειγματος στο διπλανό σχήμα.



$$5. \text{ Ισχύει: α) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$$

A Ψ

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1.$$

A Ψ

$$\alpha) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu u}{u} \right) = 1, \text{ θέτοντας } u = \frac{1}{x} \text{ και όταν}$$

$x \rightarrow +\infty$, τότε $u \rightarrow 0$, οπότε η α) πρόταση είναι **A**.

$$\beta) \text{ Ομοίως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \eta \mu x \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(u \cdot \eta \mu \frac{1}{u} \right) = 0, \text{ με την ίδια}$$

αντικατάσταση όπως στο α) και από κριτήριο παρεμβολής (παρ. σχολ. βιβλίου σελ. 52), άρα η πρόταση β) είναι **Ψ**.

6. Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$. A Ψ

Είναι $x^2 \geq 0$, πολ/ζοντας στην αρχική ανισότητα έχουμε $0 \leq x^2 f(x) \leq x^2$, επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, από κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$, οπότε η πρόταση είναι **A**.

7. Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη
θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. A Ψ

Η πρόταση είναι **Ψ**. Έστω η συνάρτηση $f(x) = -1 \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

8. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6) \cdot g(6)$. A Ψ

Η πρόταση είναι γενικά **Ψ**. Δεν γνωρίζουμε αν υπάρχουν τα όρια των f, g στο 6 και αν οι f, g είναι συνεχείς στο 6.

9. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$. A Ψ

Η πρόταση είναι **Ψ**. Ισχύει ότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, οπότε – και αν ακόμα υπήρχε το όριο της f στο x_0 – θα ίσχυε: $-\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ δηλ.

$$-1 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 1.$$

10. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. A Ψ

Η πρόταση είναι **A**. Ισχύει ότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, (1)
επειδή $-\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, από κριτήριο παρεμβολής στην (1), είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

11. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \neq 4$

ισχύει $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1. Α Ψ

Είναι $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 3)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 3) = 1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 4, οπότε $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Rightarrow f(4) = 1$. **A.**

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4, f(1) = 3$,
τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιος,
ώστε $f(x_0) = \pi$. Α Ψ

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[-1, 1]$ και ο αριθμός π είναι μεταξύ των τιμών $3 = f(1)$ και $4 = f(-1)$, άρα ισχύει το Θ.Ε.Τ. (θεώρ. Ενδιάμεσων τιμών), οπότε υπάρχει αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε $f(x_0) = \pi$.

II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m, l, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

A) $l < m$ B) $l \leq m$ Γ) $l \geq m$ Δ) $l = m$ Ε) $m < l$.

Είναι η επιλογή **B**. Θεώρημα 2ο, όριο και διάταξη, σελ. 48, σχολικό βιβλίο.

2. Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 2x^2)^3}{(x^2 + 1)^3}$ είναι ίσο με:

A) 8 B) 1 Γ) 0 Δ) $+\infty$ Ε) -8 .

Είναι η επιλογή **E**. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x^2)^3 = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)^3 = +\infty$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 2x^2)^3}{(x^2 + 1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^6}{x^6} = -8.$$

3. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

A) $+\infty$ B) $-\infty$ Γ) 1 Δ) -1 Ε) 0.

Στο $+\infty$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$, κατά συνέπεια $x^3 - x^2 - 1 > 0$, στο $+\infty$, (όριο και διάταξη Θ.1ο), οπότε $|x^3 - x^2 - 1| = x^3 - x^2 - 1$, (1).

Άρα το αρχικό $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - 1 - x^3 + x^2}{x^2} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$, που είναι η επιλογή **Ε**.

4. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x}$ δεν υπάρχει, τότε:

A) $x_0 = 0$ B) $x_0 = 2$ Γ) $x_0 = -1$ Δ) $x_0 = 1$.

A) $x_0 = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x - 2)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = 2$, άρα υπάρχει το όριο στο 0.

B) $x_0 = 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x} = \frac{0}{6} = 0$, άρα υπάρχει το όριο στο 2.

Γ) $x_0 = -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x^2 - x - 2)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$, άρα υπάρχει το όριο στο -1.

Δ) $x_0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 - 2x) = -2 < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x) = 0$, μορφή $(\alpha/0)$, $\alpha \neq 0$,

οπότε αν $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - x} = \left[(x^3 - x^2 - 2x) \cdot \frac{1}{x(x+1)(x-1)} \right]$,

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x(x+1)} = -2 < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$ και

$x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x(x+1)} = -2 < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ και

$x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

Συνεπώς **δεν** υπάρχει το όριο για $x_0 = 1$.

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Από τους Παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

A) η g είναι συνεχής στο 2

B) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Οι προτάσεις A) και B) είναι προφανώς σωστές.

Η πρόταση Γ) είναι **λάθος**, αφού η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, οπότε δεν έχει δύο σημεία ασυνέχειας. Στις θέσεις -1 και 1 δεν έχει νόημα ο έλεγχος της συνέχειας, αφού $-1 \notin D_g$ και $1 \notin D_g$.

Τέλος η πρόταση Δ) είναι προφανώς σωστή.

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x + 1}$

B) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{20} - x - 1}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$

Δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^9 + x - 1}$

E) $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x + 1)]$

ΣΤ) $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x^3 + x - 1)]$.

Τα όρια **A)**, **Γ)** και **E)** είναι **καλώς** ορισμένα, αφού οι αντίστοιχες συναρτήσεις ορίζονται "κοντά" στο 0 και $+\infty$.

Τα όρια **B)**, **Γ)** και **ΣΤ)** **δεν** είναι **καλώς** ορισμένα, αφού οι αντίστοιχες συναρτήσεις δεν ορίζονται "κοντά" στο 0 και $-\infty$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = [0, 3]$, με $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ και $f(3) = -1$.

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

A) Υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 0$.

B) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$.

Γ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Δ) $[-1, 2] \subseteq f(\Delta)$.

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1 .

A) Προκύπτει από τις υποθέσεις, αφού ισχύει το Θ. Bolzano στην f στο $[0, 3]$ με $f(0) \cdot f(3) < 0$.

B) Προκύπτει από τις υποθέσεις, αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = -1$. (ορισμός συνέχειας συνάρτησης στο $[\alpha, \beta]$).

Γ) Ομοίως, προκύπτει από τις υποθέσεις, αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, άρα και στο 2.

Δ) Προκύπτει από τις υποθέσεις, αφού $f(3) = -1$ και $f(0) = 2$, καθώς και οι ενδιάμεσες τιμές της f , ανήκουν στο $f(\Delta)$, από σχόλιο στο Θ.Ε.Τ., άρα $[-1, 2] \subseteq f(\Delta)$.

Ε) Δεν προκύπτει, κατ' ανάγκη, από τις υποθέσεις, γιατί, ενώ από τη Δ) πρόταση είναι $[-1, 2] \subseteq f(\Delta)$, δεν γνωρίζουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα (αν έχει) της f . Θα μπορούσε να υπήρχε $x_0 \in (0, 3)$ ώστε $f(x_0) = 5$ ή $f(x_0) = -2$.