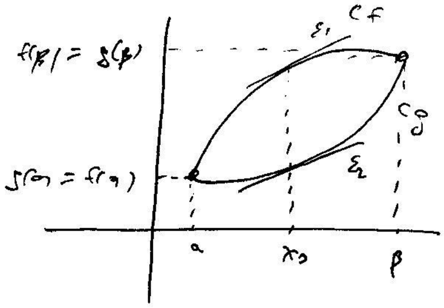
Ερωτήσεις κατανόησης σελ. 177 [Μαθ/τικά θ.π. – γ' λυκείου]

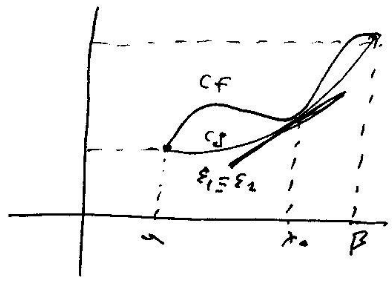
I.

1. A. Γιατί αν $f(0)=f(1)$ και η f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, από Θ. Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f'(x_0)=0$ άτοπο, αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$

2. A. Γιατί η f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και αν $f(\beta)<f(\alpha)$ από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ με $f(\beta)<f(\alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\beta)-f(\alpha)<0$ και $\beta>\alpha$ άρα $f'(x_0)<0$

3. A. Θέτουμε $h(x)=f(x)-g(x)$, $h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=0$ και $h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=0$, $h(\alpha)=h(\beta)$ από Θ. Rolle και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $h'(x_0)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x_0)-g'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=g'(x_0)$ άρα οι κλίσεις των C_f, C_g στο $A(x_0,f(x_0))$ και $B(x_0,g(x_0))$ είναι ίσες





4. $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

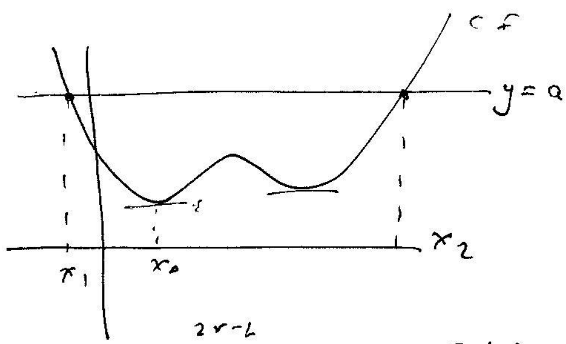
α) $f'(x)=0 \iff x=1$ ή $x=2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

Το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f είναι Λάθος

β) Σωστό για το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

5. α) Σωστό



$f(x) = a_{2\nu}x^{2\nu} + a_{2\nu-1}x^{2\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Η C_f τέμνει την $y=a$ σε δύο τουλάχιστον σημεία

άρα $f(x_1) = f(x_2)$ και από Θ. Rolle υπάρχει

$f'(x_0) = 0$ με $x_0 \in (x_1, x_2)$

β) Λάθος

Η $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, με $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

έχει $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

$f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, $\alpha \neq 0$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha x + 2\beta = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2\beta}{6\alpha}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x > -\dfrac{2\beta}{6\alpha}$, $\alpha > 0$ (χωρίς βλάβη γενικότητας)

x	$-\infty$	$\frac{-2\beta}{6\alpha}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f	$\frown$	σ.κ.	$\smile$

<u>Σωστό</u>.

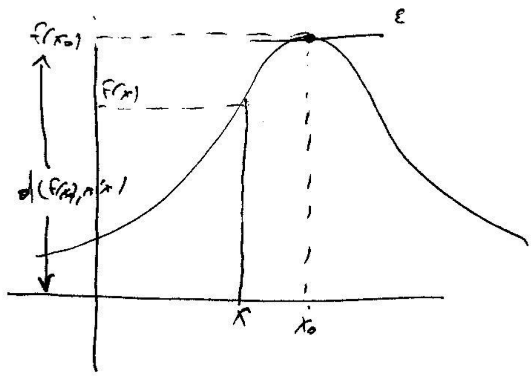
7. <u>Λάθος</u> αν $f(x) = x^3$ και $g(x) = -x^3$

οι f, g έχουν σημείο καμπής το $O(0,0)$

αλλά η $h(x) = f(x) \cdot g(x) = -x^6$

$h'(x) = -6x^5$ και $h''(x) = -30x^4 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

δεν έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$

8. 

$d(f(x_0), x'x) \geq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

άρα το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f από Θ. Fermat

είναι $f'(x_0) = 0$

<u>Σωστό</u>

9. α) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-2) = -1$

<u>Λάθος</u> η $x=1$ <u>δεν</u> είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

β) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \left[(x-2)\cdot \dfrac{1}{x-1}\right] = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2) = -1$

και $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

$x>1$ άρα $x-1>0$

<u>Σωστό</u> η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $g(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$

10. i) <u>Λάθος</u> $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ άρα για την $\frac{1}{f'}$, $x\neq\frac{\pi}{2}$

ii) <u>Λάθος</u> ομοίως

iii) <u>Λάθος</u> $f'(x)<0$ $\forall x\in\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$

iv) <u>Σωστό</u> αφού (i) ικανοποιούνται τα Θ. Rolle.

11. είναι $f'(x) = 3x^2+1>0$ άρα $f\uparrow \mathbb{R}$ και 1-1

i) <u>Λάθος</u> γιατί $0<x<1 \Rightarrow f(0)<f(x)<f(1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1<f(x)<3$

ii) <u>Σωστό</u> από Θ. Bolzano στο $[-1,0]$

iii) <u>Λάθος</u> είναι 1-1

12. $\cdot\ (f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$, $(f(g(0)))' = f'(g(0))\cdot g'(0) =$
$= f'(5)\cdot 1 = 6\cdot 1 = 6$

$\cdot\ (g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$, $(g(f(0)))' = g'(f(0))\cdot f'(0) =$
$= g'(4)\cdot 3 = 2\cdot 3 = 6$. Άρα $(f\circ g)'(0) = (g\circ f)'(0)$
οπότε <u>Σωστό</u>