

5ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
ΠΕΜΠΤΗ 19 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΘΕΤΙΚΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ & ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ - ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
(Βασικά στοιχεία συναρτήσεων)

ΛΥΣΕΙΣΘΕΜΑ Α

- A1. Οι συναρτήσεις f, g ονομάζονται ίσες αν:
- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και (2 μον.)
 - για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = g(x)$ (3 μον.)
- A2. α) Σ , β) Σ , γ) Σ , δ) Λ , ε) Λ
 (5x3 = 15 μον.)

ΘΕΜΑ Β

- B1. • Για την $f \circ g$ πρέπει να υπάρχει το σύνολο:
- $$A = \{x \in A_f \mid g(x) \in A_f\} \text{ σύμφωνα με } \{x \in (0, +\infty) \mid x^2 \in (0, +\infty)\}$$
- οπότε $\{x > 0 \text{ και } x^2 > 0\}$, ισχύει $A = A_{f \circ g} = (0, +\infty)$ (10 μον.)
- Ορίζεται η $h = f \circ g$ με $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$
- $$= \frac{2\sqrt{g(x)} - 1}{\sqrt{g(x)} + 2} = \frac{2\sqrt{x^2} - 1}{\sqrt{x^2} + 2} = \frac{2|x| - 1}{|x| + 2} = \frac{2x - 1}{x + 2}, \text{ αφού } x > 0. \quad (10 \text{ μον.})$$
- B2. • Εξετάζουμε την h ως προς 1-1.
- Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1 - 1}{x_1 + 2} = \frac{2x_2 - 1}{x_2 + 2} \Leftrightarrow$
- $$\Leftrightarrow (2x_1 - 1)(x_2 + 2) = (2x_2 - 1)(x_1 + 2) \Leftrightarrow$$
- $$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 4x_1 - x_2 - 2 = 2x_2x_1 + 4x_2 - x_1 - 2 \Leftrightarrow$$
- $$\Leftrightarrow 5x_1 = 5x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ άρα η } h \text{ είναι 1-1.} \quad (5 \text{ μον.})$$
- οπότε αμεσως έπεται.
- Είναι $y = h(x) \Leftrightarrow h^{-1}(y) = x$, για $x > 0$ και $y \in h((0, +\infty))$.
- Οπότε $y = \frac{2x - 1}{x + 2} \Leftrightarrow yx + 2y = 2x - 1 \Leftrightarrow x(y - 2) = -1 - 2y \Leftrightarrow$
- $$\Leftrightarrow x = \frac{2y + 1}{2 - y}, \quad y \neq 2. \text{ Επίσης } x > 0 \Leftrightarrow \frac{2y + 1}{2 - y} > 0 \Leftrightarrow$$
- $$h^{-1}(y) = \frac{2y + 1}{2 - y}, \quad y \in (-\frac{1}{2}, 2) \quad \Leftrightarrow (2y + 1)(2 - y) > 0, \quad y \neq 2$$
- $$\Leftrightarrow y \in (-\frac{1}{2}, 2) \quad (5 \text{ μον.})$$
- Οπότε $h^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{2 - x},$
 $x \in (-\frac{1}{2}, 2)$ (5 μον.)

B3. Αν οι $C_h, C_{h^{-1}}$ είχαν κοινά σημεία, τότε

θα είχε λύση η εξίσωση:

$$h(x) = h^{-1}(x) \quad \mu \in \quad x > 0 \quad \text{και} \quad x \in (-\frac{1}{2}, 2) \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2x+1}{2-x}, \quad 0 < x < 2 \quad (1 \text{ μον.})$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(2-x) = (2x+1)(x+2) \Leftrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \Leftrightarrow 4x - 2x^2 - 2 + x = 2x^2 + 4x + x + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4 = 0, \text{ η εξίσωση δεν λύνεται.} \end{array} \right\} (2 \text{ μον.})$$

Άρα οι $C_h, C_{h^{-1}}$ δεν έχουν κοινά σημεία. (1 μον.)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Για να ορίσουμε η $f(e^x-1)$ πρέπει $e^x-1 \in A_f$ (1)
 $\mu \in A_f = (-1, +\infty)$ αφού πρέπει $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
 Οπότε από (1) πρέπει $e^x-1 > -1 \Leftrightarrow e^x > 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μον.)

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } f(e^x-1) &= 2 - \ln((e^x-1)+1) = \\ &= 2 - \ln(e^x-1+1) = 2 - \ln e^x = \\ &= 2 - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (5 \text{ μον.})$$

ii) Για να είναι $1 \in f(A)$, αρκεί να υπάρχει $x \in A_f$, $\text{such that } x > -1$ ώστε

$$\begin{aligned} (1 \text{ μον.}) \quad f(x) = 1 &\Leftrightarrow 2 - \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow -\ln(x+1) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln e \Leftrightarrow x+1 = e \Leftrightarrow x = e-1, \text{ δεκτό, } \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (3 \text{ μον.})$$

αφού $e-1 > -1 \Leftrightarrow e > 0$ ισχύει. (1 μον.)

Άρα $f(e-1) = 1 \in A_f$

Γ2. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$

$$\begin{aligned} \mu \in -1 < x_1 < x_2 &\Leftrightarrow 0 < x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \ln(x_1 + 1) < \ln(x_2 + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\ln(x_1 + 1) > -\ln(x_2 + 1) \Leftrightarrow 2 - \ln(x_1 + 1) > 2 - \ln(x_2 + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η $f \downarrow (-1, +\infty)$, (5 μον.)

Για την $f \circ f$ έχουμε το σύνολο:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in A_f \mid f(x) \in A_f\} = \{x > -1 \text{ και } 2 - \ln(x+1) > -1\} = \\ &= \{x > -1 \text{ και } -\ln(x+1) > -3\} = \\ &= \{x > -1 \text{ και } \ln(x+1) < 3\} = \{x > -1 \text{ και } x+1 < e^3\} = \\ &= \{x > -1 \text{ και } x < e^3 - 1\} \end{aligned}$$

Άρα $A = (-1, e^3 - 1)$ (5 μον.)

Ορίζεται η $f \circ f$ στο $(-1, e^3 - 1)$

και για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in (-1, e^3 - 1)$ με

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \quad \mu \in f(x_1), f(x_2) \in A_f \\ &\stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2) \text{ και η } (f \circ f) \uparrow (-1, e^3 - 1) \end{aligned}$$

(5 μον.)

Γ3. Είναι $f(e^x - 1) = e^{x-1}$ (Γ1. ii)

$$\Leftrightarrow 2 - x = e^{x-1} \Leftrightarrow e^{x-1} + x - 2 = 0 \quad (1)$$

Προφανώς λύση $x=1$, φαίνεται η (1) γίνεται $e^{1-1} + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0$. (5 μον.)

Επίσης θέτουμε $g(x) = e^{x-1} + x - 2$ και για

κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1}$$

και $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow \frac{e^{x_1-1} + x_1}{x_1-1} < \frac{e^{x_2-1} + x_2}{x_2-1} \Rightarrow e^{x_1-1} + x_1 - 2 < e^{x_2-1} + x_2 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1) < g(x_2), \text{ η } g \uparrow \mathbb{R} \text{ άρα και } \mathbb{R}.$$

Ολοένα η γιγίσ $x=1$ της (1) είναι μοναδική. (5 μον.)