

5ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 20/5/2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ - ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΕΛΙΔΕΣ ΔΥΟ (2)

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Λάθος.

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 133.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

- Αν $0 < x < 1$, τότε $\ln x < 0$, οπότε $f'(x) < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$.
- Αν $x > 1$, τότε $\ln x > 0$, οπότε $f'(x) > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Από την αλλαγή μονοτονίας της συνάρτησης συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$. Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με $f(1) = 1(-1) + 1 = 0$.

B2. Με $x > 0$ έχουμε:

$$x \ln x + 1 = x \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x(\ln x - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

αφού από το ερώτημα α) έχουμε $f(1) = 0$ και $f(x) > f(1)$ οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$.

ΘΕΜΑ Γ

α) Η συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 4x^3 + 6x \text{ και } f''(x) = 12x^2 + 6, x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) = 6(2x^2 + 1) > 0$, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) i. Η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο A έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(1) = 10$ και εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 4 = 10(x - 1) \Leftrightarrow y = 10x - 14$$

ii. Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε για κάθε $x \neq 1$ ισχύει

$$f'(x) \neq f'(1) \Leftrightarrow f'(x) \neq 10$$

Επομένως δεν υπάρχει σημείο της C_f διαφορετικό από το A στο οποίο η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} > 0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right)' = \left((x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \right)' = -\frac{3}{2} (x^2+1)^{-\frac{3}{2}-1} \cdot (x^2+1)' = -\frac{3}{2} (x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \\ &= -\frac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}} \end{aligned}$$

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}} > 0 \Leftrightarrow -3x > 0 \Leftrightarrow x < 0$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $-\infty, 0$, κοίλη στο διάστημα $0, +\infty$ και παρουσιάζει καμπή στη θέση $x_0 = 0$.

Δ3.

- i. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι η f' είναι:
- γνησίως αύξουσα στο $-\infty, 0$ αφού η f' είναι συνεχής σε αυτό και ισχύει $f''(x) > 0$,
 - γνησίως φθίνουσα στο $0, +\infty$ αφού η f' είναι συνεχής σε αυτό και ισχύει $f''(x) < 0$ και
 - παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0 = 0$, την $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{(0^2+1)^3}} = 1$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) \leq f'(0) \Leftrightarrow f'(x) \leq 1$.

Εναλλακτικά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow 1 \leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

- ii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\alpha < \alpha + 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x) dx > 0 \Rightarrow f(\alpha+1) - f(\alpha) > 0.$$

Ακόμη για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι $f(\alpha+1) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x) dx$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) \leq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 0$ άρα $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x) dx < \int_{\alpha}^{\alpha+1} 1 dx \Rightarrow f(\alpha+1) - f(\alpha) < \alpha+1 - \alpha \Rightarrow f(\alpha+1) - f(\alpha) < 1$.

Τελικά, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $0 < f(\alpha+1) - f(\alpha) < 1$.

β τρόπος (για τη δεξιά ανισότητα)

Για να αποδείξουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(\alpha+1) - f(\alpha) < 1$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\alpha+1) - f(\alpha) < \alpha+1 - \alpha$ δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\alpha+1) - (\alpha+1) < f(\alpha) - \alpha$.

Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0, x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x_0 = 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα. Οπότε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \alpha+1$ ισχύει $g(\alpha) > g(\alpha+1) \Rightarrow f(\alpha) - \alpha > f(\alpha+1) - (\alpha+1)$ και έπεται το ζητούμενο.