

5ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΕΜΠΤΗ 4 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ -
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : Δύο (2)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πότε μια συνάρτησης f , λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;

Μονάδες 7

- A2.** Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 8

- A3.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $f(x) = a^x$, με $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται, τότε ισχύει πάντοτε ότι : $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in f(A)$, όπου A το πεδίο ορισμού της f και $f(A)$ το σύνολο τιμών της f .

γ. Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0 , τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot f(x)) = 0$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σ'ένα διάστημα Δ , τότε τα άκρα του διαστήματος Δ είναι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων της f (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

ε. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $f = g$.

Μονάδες 6

- B2. i)** Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = (x+1)^2$, $x \geq -1$. (μονάδες 6)

ii) Να βρείτε το πεδίο της συνάρτησης $f^{-1} - f$ (μονάδες 3) και να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) > x > f(x)$, για κάθε $x \geq 0$. (μονάδες 3)

Μονάδες 12

- B3.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ και να δείξετε $(f \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x} - 1} - 1$, για κάθε $x \geq 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με τις ιδιότητες : $e^x \cdot f''(x) = 1$, για κάθε πραγματικό αριθμό και η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon: y = x$ στο $+\infty$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (μονάδες 4) και κατόπιν να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha^2 + 1$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ (μονάδες 5).

Μονάδες 9

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι $1 \leq f(\kappa) \leq \kappa \cdot f'(\kappa) + 1$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε : $4f(x^2) - f^2(3x - 2) \geq 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η $f(1) = f(4)$ (μονάδες 4) και κατόπιν ότι η γραφική παράσταση της f έχει, σε ένα τουλάχιστον σημείο της, εφαπτομένη ευθεία, παράλληλη στον $x'x$ άξονα. (μονάδες 5)

Μονάδες 9

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι $f'(1) = f'(4)$.

Μονάδες 9

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο, τουλάχιστον, πιθανές θέσεις σημείων καμπής στο διάστημα $(1, 4)$.

Μονάδες 7