

ΑΝΑΛΥΣΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Λύσεις
Υποδείξεις

1ο – 2ο Κεφ.

Όρια – Συνέχεια Συναρτήσεων - Διαφορικός Λογισμός

ΑΠΡ 2024

ΘΕΜΑ Α

A1.

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta) \text{ (Σχ. 63β)}$$

(μονάδες 7)

A2.

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε

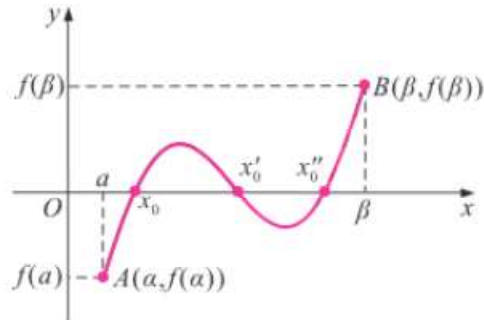
$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

(μονάδες 4)

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x , η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



(μονάδες 4)

A3. α) Λάθος, β) Σωστό, γ) Σωστό, δ) Σωστό, ε) Λάθος
(5 x 2 = 10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να είναι $f = g$, αρκεί να δείξουμε ότι $D_f = D_g$ και $f(x) = g(x)$.

Πράγματι· για το D_f πρέπει $x \geq 0$ και $\sqrt{x} + 1 \neq 0$, που ισχύει για κάθε $x \geq 0$, άρα $D_f = [0, +\infty)$, ομοίως $D_g = [0, +\infty)$, άρα $D_f = D_g$. (1) **(μον. 2)**

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \\ &= \sqrt{x}-1 = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x), \quad (2). \text{ Συνεπώς από (1), (2) είναι } f = g \text{ (μον. 4)} \end{aligned}$$

- B2.** i) Αφού από B1 είναι $f = g$, αρκεί να υπολογίσουμε τη g^{-1} , δηλ. να εξετάσουμε την g αν είναι 1-1.

$$\text{Για κάθε } x > 0, \text{ είναι } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

στο $[0, +\infty)$, συνεπώς 1-1 και αντιστρέψιμη. (μον. 2)

Είναι $y = g(x) \Leftrightarrow g^{-1}(y) = x$, με $x \geq 0$ και $y \in D_g$

$$\text{Οπότε } y = \sqrt{x} - 1, \quad \text{με } \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow y \geq -1$$

$$\Leftrightarrow y + 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y + 1)^2 = x = g^{-1}(y), \text{ με } y \geq -1$$

Συνεπώς $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) = (x + 1)^2, x \geq -1$ (μον. 4)

- ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης διαφοράς $f^{-1} - f$, είναι τα κοινά σημεία των Df^{-1} και Df , δηλ. $x \geq -1$ και $x \geq 0$, άρα $D(f^{-1} - f) = [0, +\infty)$, (μον. 3)

$$\text{Επίσης } f^{-1}(x) > x \Leftrightarrow (x + 1)^2 > x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > x \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 0, \text{ που}$$

$$\text{ισχύει για κάθε } x \geq 0 \text{ και } x > f(x) \Leftrightarrow x > \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x + 1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow (x + 1)^2 > x, \text{ που ισχύει από (3).}$$

$$\text{Οπότε } f^{-1}(x) > x > f(x), \text{ για κάθε } x \geq 0. \text{ (μον. 3)}$$

- B3.** Για να ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$, πρέπει να υπάρχει σύνολο

$$A = \{x \in D_g \text{ με } g(x) \in D_f\}, \text{ δηλ. } x \geq 0 \text{ και } \sqrt{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{και } x \geq 0, \text{ άρα } D(f \circ g) = A = [1, +\infty), \text{ με τύπο}$$

$$(f \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{g(x)} - 1 = \sqrt{\sqrt{x} - 1} - 1, x \geq 1. \text{ (μον. 7)}$$

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Για $x \in \mathbb{R}$, είναι $e^x f''(x) = 1 \Leftrightarrow f''(x) = e^{-x} \Leftrightarrow (f'(x))' = (-e^{-x})' \Leftrightarrow f'(x) = -e^{-x} + c_1$
 $\Leftrightarrow f'(x) = (e^{-x} + c_1 x)' \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} + c_1 x + c_2$, εφρμ. 2 φορές πόρ. συν. Θ.Μ.Τ. στο $\mathbb{R}$. (μον. 4)

Υπολογίζουμε τις σταθερές c_1, c_2 , από την ασύμπτωτη $\varepsilon: y = x$ της C_f στο $+\infty$.

$$\text{Ισχύει } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0 \text{ δηλ. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} + c_1 x + c_2 - x] = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} + (c_1 - 1)x + c_2] = 0, \quad (1)$$

$$\bullet \text{ αν } c_1 > 1 \Leftrightarrow c_1 - 1 > 0, \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} + (c_1 - 1)x + c_2] = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(c_1 - 1)x + c_2] = +\infty, \text{ άτοπο από (1), ομοίως}$$

$$\bullet \text{ αν } c_1 < 1 \Leftrightarrow c_1 - 1 < 0, \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} + (c_1 - 1)x + c_2] = -\infty, \text{ αφού}$$

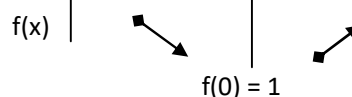
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(c_1 - 1)x + c_2] = -\infty, \text{ άτοπο από (1),}$$

$$\bullet \text{ άρα } c_1 = 1 \Leftrightarrow c_1 - 1 = 0, \text{ και από (1) είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + c_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = -c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

$$\text{Άρα για } c_1 = 1 \text{ και } c_2 = 0, \text{ είναι } f(x) = e^{-x} + x, x \in \mathbb{R}. \text{ (μον. 5)}$$

- Γ2.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) = 1 - e^{-x}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$,
 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} < 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$, άρα έχουμε :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$,
 γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$, επίσης
 • για κάθε $x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$,
 • για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
 είναι $f(x) \geq 1$. (Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$)
 Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, (2)
(μον. 4)

Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών της f :

$$\bullet \quad f((-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = [1, +\infty), \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-x}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{-x}(xe^x + 1)] = +\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{-e^{-x}}\right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}) = +\infty, \text{ η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}, \text{ άρα και στο } 1,$$

$$\bullet \quad f((0, +\infty)) = (f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (1, +\infty), \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty,$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0,$$

οπότε $f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0]) \cup f((0, +\infty)) = [1, +\infty)$, άρα $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha^2 + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

• αν $\alpha \neq 0$, είναι $\alpha^2 + 1 > 1$, δηλ. ο αριθμός $\alpha^2 + 1 \in f((-\infty, 0]) = [1, +\infty)$,
 οπότε υπάρχει αριθμός $x_1 \in (-\infty, 0)$, από Θ.Ε.Τ. ώστε $f(x_1) = \alpha^2 + 1$, ο x_1
 είναι και μοναδικό στο $(-\infty, 0)$, λόγω μονοτονίας, ομοίως
 ο αριθμός $\alpha^2 + 1 \in f((0, +\infty)) = (1, +\infty)$, οπότε υπάρχει αριθμός $x_2 \in (0, +\infty)$,
 από Θ.Ε.Τ. ώστε $f(x_2) = \alpha^2 + 1$, ο x_2 είναι και μοναδικό στο $(0, +\infty)$, λόγω
 μονοτονίας, συνεπώς για $\alpha \neq 0$, η εξίσωση $f(x) = \alpha^2 + 1$, έχει ακριβώς δύο
 ρίζες.

• αν $\alpha = 0$, η εξίσωση γίνεται $f(x) = 1$, η οποία είναι μοναδική ρίζα, την
 $x = 0$, από (2).

(μον. 5)

- Γ3.** Από Γ2 είναι $f(x) \geq 1$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(\kappa) \geq 1$, άρα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$,
 Για $\kappa > 0$, εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[0, \kappa]$, αφού η f είναι συνεχής στο $[0, \kappa]$
 και παραγωγίσιμη στο $(0, \kappa)$, άρα υπάρχει $\xi_1 \in (0, \kappa)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\kappa) - f(0)}{\kappa}, \quad (3), \text{ επίσης } 0 < \xi_1 < \kappa \text{ και η } f' \text{ είναι γν. αύξουσα, αφού}$$

$$f''(x) = e^{-x} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε } f'(\xi_1) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(\kappa) - f(0)}{\kappa} < f'(\kappa) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\kappa) - 1 < \kappa f'(\kappa), \quad \kappa > 0, \text{ άρα } f(\kappa) < \kappa f'(\kappa) + 1, \quad (4), \text{ για } \kappa > 0, \text{ ομοίως}$$

για $\kappa < 0$, εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[\kappa, 0]$, αφού η f είναι συνεχής στο $[\kappa, 0]$
 και παραγωγίσιμη στο $(\kappa, 0)$, άρα υπάρχει $\xi_2 \in (\kappa, 0)$ ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(0) - f(\kappa)}{-\kappa}, \quad (5), \text{ επίσης } \kappa < \xi_2 < 0 \text{ και η } f' \text{ είναι γν. αύξουσα,}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(k) < f'(\xi_2) \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} f'(k) < \frac{f(k) - 1}{k} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(k) - 1 < k f'(k)$, $k < 0$, άρα $f(k) < k f'(k) + 1$, (6), για $k < 0$.
 Τέλος για $k = 0$, ισχύει $f(0) = 0 \cdot f'(0) + 1$,
 συνεπώς σε κάθε περίπτωση ισχύει: $1 \leq f(k) \leq k f'(k) + 1$. (μον. 7)

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Για $x = 1$, στη δεδομένη σχέση έχουμε $4f(1) - f^2(1) \geq 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f^2(1) - 4f(1) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(1) - 2)^2 \leq 0$, άρα $f(1) = 2$, (1),
 για $x = 2$, στη δεδομένη σχέση έχουμε $4f(4) - f^2(4) \geq 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f^2(4) - 4f(4) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (f(4) - 2)^2 \leq 0$, άρα $f(4) = 2$, (2), οπότε από
 (1), (2), είναι $f(1) = f(4) = 2$. (μον. 4)

Επίσης αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0) = 0$, (3) πράγματι·
 εφαρμόζουμε Θ. Rolle στην f στο $[1, 4]$, αφού η f είναι συνεχής στο $[1, 4]$,
 παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ και $f(1) = f(4)$, άρα υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1, 4)$,
 ώστε $f'(x_0) = 0$, άρα η C_f στο $(x_0, f(x_0))$ δέχεται εφαπτομένη ευθεία,
 παράλληλη στον $x'x$ άξονα. (μον. 5)

- Δ2.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 4f(x^2) - f^2(3x - 2)$, για $x = 1$, έχουμε
 $g(1) = 4f(1) - f^2(1) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$, άρα (από υπόθεση) $g(x) \geq g(1)$, η g είναι
 παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο εσωτερικό του σημείο 1, στο οποίο η g
 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, οπότε από Θ. Fermat, είναι $g'(1) = 0$, με
 $g'(x) = 4f'(x^2) \cdot 2x - 2f(3x - 2) \cdot f'(3x - 2) \cdot 3 = 8xf'(x^2) - 6f(3x - 2) \cdot f'(3x - 2)$,
 οπότε για $x = 1$, έχουμε $g'(1) = 8f'(1) - 6f(1) \cdot f'(1) \Leftrightarrow 8f'(1) - 12f'(1) = 0 \Leftrightarrow$
 $f'(1) = 0$, (4), (μον. 5) ομοίως

για $x = 2$, $g(2) = 4f(4) - f^2(4) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$, άρα (από υπόθεση)
 $g(x) \geq g(2)$, και στο εσωτερικό του σημείο 2, η g παρουσιάζει τοπικό
 ελάχιστο, οπότε από Θ. Fermat, είναι $g'(2) = 0$, επίσης
 $g'(x) = 8xf'(x^2) - 6f(3x - 2) \cdot f'(3x - 2)$, οπότε για $x = 2$, έχουμε
 $g'(2) = 16f'(4) - 6f(4) \cdot f'(4) \Leftrightarrow 16f'(4) - 12f'(4) = 0 \Leftrightarrow f'(4) = 0$, (5),

από (4), (5) είναι $f'(1) = f'(4) = 0$. (μον. 4)

- Δ3.** Πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ ,
 ονομάζουμε τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, δηλ.
 $f''(x) = 0$, ή τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' , αλλά
 επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι πιθανές θέσεις σημείων
 καμπής της f είναι μόνο στα εσωτερικά σημεία του $(1, 4)$ στα οποία
 $f''(x) = 0$, (μον. 3)

από Δ1 και Δ2, έχουμε $f'(1) = f'(x_0) = f'(4) = 0$, με $x_0 \in (1, 4)$, οπότε
 εφαρμόζουμε δύο θεωρήματα Rolle, στην f' και στα διαστήματα $[1, x_0]$ και
 $[x_0, 4]$ αντίστοιχα, αφού η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα
 διαστήματα, άρα υπάρχουν αριθμοί $\xi_1 \in (1, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, 4)$, τουλάχιστον
 ένας σε κάθε διάστημα, ώστε $f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$, άρα έχουμε δύο
 τουλάχιστον, πιθανές θέσεις, ξ_1, ξ_2 , σημείων καμπής της f στο διάστημα
 $(1, 4)$. (μον. 4)