

5ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΤΕΤΑΡΤΗ 2 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ -
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : Δύο (2)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πότε μια συνάρτησης f , λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;
Μονάδες 7
- A2.** Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.
Μονάδες 8
- A3.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*
- α.** Αν η συνάρτηση f αντιστρέφεται, τότε ισχύει πάντοτε ότι :
 $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$, όπου A το πεδίο ορισμού της f .
- β.** Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$,
και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- γ.** Αν οι συναρτήσεις f, g , έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- δ.** Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.
- ε.** Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ώστε $f(x) \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.
Μονάδες 7
- B2.** Για $\alpha = 1$ **i)** να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (μονάδες 8)
- ii)** να αποδείξετε ότι $f(x) \leq \frac{1}{e}$, $x > 0$. (μονάδες 3)

Μονάδες 11

- B3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln^2 x + 2\lambda x = 0$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, +\infty)$, για κάθε $\lambda < -\frac{1}{e}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x + x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha \in (-1, 0)$, τέτοιος ώστε να ισχύει: $e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0$.

Μονάδες 9

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου α ο αριθμός του Γ1 ερωτήματος.

Μονάδες 9

- Γ3.** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = \frac{2025}{2024}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} \leq f'(x) \leq \frac{f'(0) + f'(1)}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η C_f έχει παράλληλες εφαπτομένες ευθείες στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$, αντιστοίχως.

Μονάδες 8

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η f' παρουσιάζει ολικά ακρότατα (μέγιστο και ελάχιστο) στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον τέσσερα πιθανά σημεία καμπής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ :
ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ - ΚΑΡΑΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ - ΤΡΙΜΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ