

ΑΝΑΛΥΣΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Λύσεις
Υποδείξεις

1ο – 2ο Κεφ.

Όρια – Συνέχεια Συναρτήσεων - Διαφορικός Λογισμός

ΑΠΡ 2025

ΘΕΜΑ Α

A1.

— Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

(μονάδες 7)

A2.

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β)

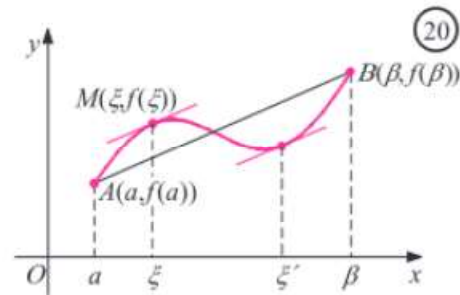
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

(μονάδες 4)

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Μ.Τ.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



(μονάδες 4)

A3. α) Λάθος, β) Σωστό, γ) Σωστό, δ) Σωστό, ε) Λάθος
(5 x 2 = 10 μονάδες)

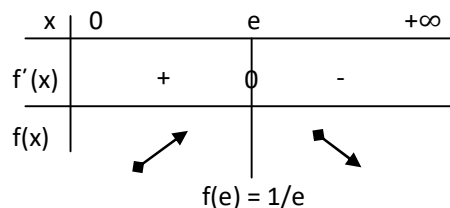
ΘΕΜΑ Β

B1. Θέτουμε $g(x) = f(x) - x + 1$, είναι $g(1) = f(1) - 1 + 1 = 0$, αφού $f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0$, από υπόθεση είναι $f(x) - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(1)$, $x > 0$, άρα η g παρουσιάζει μέγιστο στο εσωτερικό $x = 1$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και από Θ. Fermat έχουμε $g'(1) = 0$.

Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{\alpha - \alpha \ln x}{(\alpha x)^2} - 1$, άρα $g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - 0}{\alpha^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ απορ. ή $\alpha = 1$ δεκτή. **(μον. 7)**

B2. i) Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > 0$.

• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e$.



Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$, αφού η f είναι συνεχής στο $(0, e]$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, ως συνεχής στο $[e, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $(e, +\infty)$, παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0 = e$, το $f(e) = 1/e$. **(μον. 4)**

Για το σύνολο τιμών της f , θέτουμε $A_1 = (0, e]$ και $A_2 = (e, +\infty)$,

είναι $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e)]$, αφού η $f \uparrow (0, e]$, με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και

$= f(e) = 1/e$, οπότε $f(A_1) = (-\infty, 1/e]$,

επίσης $f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e))$, αφού η $f \downarrow (e, +\infty)$, η f είναι συνεχής στο

$x_0 = e$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε $f(A_2) = (0, 1/e)$,

συνεπώς $f((0, +\infty)) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1/e] \cup (0, 1/e) = (-\infty, 1/e]$, η f συνεχής στο $(0, +\infty)$. **(μον. 4)**

ii) καθώς η f παρουσιάζει στο $x_0 = e$, μέγιστο ισχύει: $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow f(x) \leq 1/e$. **(μον. 3)**

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln^2 x + 2\lambda x$, $x > 0$. Έστω ότι η h έχει δύο διαφορετικές ρίζες ρ_1, ρ_2 με $0 < \rho_1 < \rho_2$. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στην h στο $[\rho_1, \rho_2]$, αφού η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$, άρα υπάρχει $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$, ώστε $h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\ln x_1}{x_1} + 2\lambda = 0$

$\Leftrightarrow f(x_1) = -\lambda$, αλλά από B2.i) ερώτημα είναι $f(x) \leq 1/e$, για κάθε $x > 0$, άρα $f(x_1) \leq 1/e \Leftrightarrow -\lambda \leq 1/e \Leftrightarrow \lambda \geq -1/e$, άτοπο, αφού είναι $\lambda < -1/e$ από υπόθεση. **(μον. 7)**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θέτουμε συνάρτηση $g(x) = e^x + 2x + 1$, η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 0]$. Επίσης $g(-1) = e^{-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2e$ (ισχύει) και $g(0) = 2 > 0$, άρα $g(-1)g(0) < 0$ και ισχύει το Θ. Bolzano στη g στο $[-1, 0]$, οπότε υπάρχει αριθμός $\alpha \in (-1, 0)$, ώστε $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0$. **(μον. 6)**
Επιπλέον η g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτησης άρα και $1 - 1$, καθώς $g'(x) = e^x + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και στο $[-1, 0]$, οπότε ο αριθμός α είναι μοναδική ρίζα της g στο $(-1, 0)$. **(μον. 3)**

Γ2. Είναι $f'(x) = e^x + 2x + 1$, δηλ. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha$, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η μοναδική ρίζα στο $(-1, 0)$ είναι και μοναδική στο $\mathbb{R}$.

Επίσης για κάθε $x < \alpha \xrightarrow{g \uparrow} g(x) < g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$, (1)

και για κάθε $x > \alpha \xrightarrow{g \uparrow} g(x) > g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, (2), οπότε από

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

τ. ε. $f(\alpha)$

τις (1), (2) προκύπτει ο διπλανός πίνακας. **(μον. 5)**

Η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = \alpha$, ελάχιστο το $f(\alpha)$, συνεπώς $f(x) \geq f(\alpha)$, (3), αλλά

$f(\alpha) = e^\alpha + \alpha^2 + \alpha$ και από Γ1 ερώτημα, είναι $e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^\alpha = -2\alpha - 1$, άρα $f(\alpha) = -2\alpha - 1 + \alpha^2 + \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - 1$, (4). Τελικά η (4) στην (3) δίνει $f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1$. **(μον. 4)**

Γ3. Είναι $f((-\infty, \alpha]) \xrightarrow{f \downarrow} [f(\alpha), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = [\alpha^2 - \alpha - 1, +\infty)$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^2 + x) = +\infty$, επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = +\infty$,

επίσης ο αριθμός $\frac{2025}{2024} > 1 > \alpha^2 - \alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 < 0 \Leftrightarrow$

$\alpha \in (-1, 2)$, άρα ισχύει για $\alpha \in (-1, 0)$, δηλ. $\frac{2025}{2024} \in f((-\infty, \alpha])$, από Θ.Ε.Τ.

υπάρχει αριθμός $x_1 \in (-\infty, \alpha)$, ώστε $f(x_1) = 0$. Η ρίζα x_1 είναι μοναδική στο $(-\infty, \alpha)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$, άρα και $1 - 1$. **(μον. 4)**

Ομοίως είναι $f((\alpha, +\infty)) \xrightarrow{f \uparrow} [f(\alpha), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [\alpha^2 - \alpha - 1, +\infty)$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2 + x) = +\infty$, επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = +\infty$,

επίσης ο αριθμός $\frac{2025}{2024} \in f((\alpha, +\infty))$, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει αριθμός

$x_2 \in (\alpha, +\infty)$, ώστε $f(x_2) = 0$. Η ρίζα x_2 είναι μοναδική στο $(\alpha, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$, άρα και $1 - 1$.

Οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{2025}{2024}$, έχει ακριβώς δύο ρίζες. **(μον. 3)**

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Αρκεί να δείξουμε ότι : $f'(0) = f'(1)$, αφού οι παράλληλες εφαπτομένες ευθείες έχουν ίσες κλίσεις. **(μον. 2)**

Από υπόθεση ισχύει ότι: $\frac{f(3) - f(1)}{2} \leq f'(x) \leq \frac{f'(0) + f'(1)}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (1),

από την (1), για $x = 0$, έχουμε $2f'(0) \leq f'(0) + f'(1) \Leftrightarrow f'(0) \leq f'(1)$, (2) και για $x = 1$, έχουμε $2f'(1) \leq f'(0) + f'(1) \Leftrightarrow f'(1) \leq f'(0)$, (3), οπότε από (2), (3), έχουμε $f'(0) = f'(1)$. **(μον. 6)**

- Δ2.** Στην (1), θέτουμε, όπου $f'(0) = f'(1)$ και έχουμε διαδοχικά :

$$f'(x) \leq \frac{f'(0) + f'(0)}{2} = f'(0) \Rightarrow f'(x) \leq f'(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε η } f'$$

παρουσιάζει στη θέση $x_1 = 0$, ολικό μέγιστο, το $f'(0)$, ομοίως

$$f'(x) \leq \frac{f'(1) + f'(1)}{2} = f'(1) \Rightarrow f'(x) \leq f'(1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε η } f'$$

παρουσιάζει στη θέση $x_2 = 1$, ολικό μέγιστο, το $f'(1)$, άρα η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο, σε δύο τουλάχιστον θέσεις. **(μον. 5)**

Επίσης η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[1, 3]$ ως συνεχής στο $[1, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$, αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$, άρα υπάρχει αριθμός $x_3 \in (1, 3)$, ώστε $f'(x_3) = \frac{f(3) - f(1)}{2}$, από την (1)

$f'(x_3) \leq f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f' παρουσιάζει στη θέση x_3 , ολικό ελάχιστο το $f'(x_3)$. **(μον. 4)**

- Δ3.** Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$, έχει 4 τουλάχιστον ρίζες, καθώς τα πιθανά σημεία καμπής προκύπτουν από τα σημεία στα οποία η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται ή δεν υπάρχει, αλλά αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, αποκλείεται η δεύτερη περίπτωση.

Από το Δ2 ερώτημα έχουμε ότι η f' έχει στο $x_1 = 0$, ακρότατο και από το Θ.Fermat, ισχύει $f''(x_1) = 0$, (η f' είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό x_1), ομοίως στις θέσεις $x_2 = 1$ και x_3 , οπότε $f''(x_2) = f''(x_3) = 0$. **(μον. 6)**

Επίσης από το Δ1, έχουμε $f'(0) = f'(1)$ και η f' ικανοποιεί και το Θ.Rolle, άρα υπάρχει αριθμός $x_4 \in (0, 1)$, ώστε $f''(x_4) = 0$.

Συνεπώς $f''(0) = f''(x_4) = f''(1) = f''(x_3) = 0$, με $0 < x_4 < 1 < x_3$. **(μον. 2)**

(Σημείωση : Επειδή στις θέσεις 0, 1 και x_3 η f παρουσιάζει ακρότατα δεν μπορεί ταυτόχρονα να έχει και σημεία καμπής)