

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
5ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ο. Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : Τρεις (3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .
- Μονάδες 7**
- A2.** Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται “1 – 1”.
- Μονάδες 4**
- A3.** Τι ονομάζουμε παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
- Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει δύο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.
- β.** Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .
- γ.** Για οποιαδήποτε συνάρτηση f , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$.
- δ.** Οποιαδήποτε συνάρτηση f η οποία δεν παρουσιάζει ακρότατο στο πεδίο ορισμού της A και είναι παραγωγίσιμη στο A , έχει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$.
- ε.** Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, -2) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x} - \frac{x^2 + 3}{x + 2}$.

B1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι η C_f έχει μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη ευθεία.

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$, της συνάρτησης f , με $A = (-\infty, -2)$.

Μονάδες 7

B4. Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in A$, ώστε :

$$f^3(x_0) - (2 + \alpha)f^2(x_0) + 2f(x_0) - 2(2 + \alpha) = 0.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με

$$f'(x) = \frac{2}{1 + e^{f(x)}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad f'(0) = 1 \text{ και σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το } \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} (μονάδες 4) και κατόπιν να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} , έχουν κοινή εφαπτομένη στο $O(0, 0)$ την ευθεία $\varepsilon : y = x$. (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο \mathbb{R} (μονάδες 3) και ότι $f(x) \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω μεταξύ της C_f , της εφαπτομένης της στο $O(0, 0)$ και της ευθείας $x = 1$, είναι

$$E(\Omega) = \frac{(f(1))^2 - 8f(1) + 6}{4} \text{ τ.μ.}$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 2x$, $x > 0$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

Μονάδες 7

- Δ2.** Αν $(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο καμπής της f , να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

Μονάδες 5

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι $f'(x_0) > 0$ και στη συνέχεια ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

- Δ4.** Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιοι ώστε

$$f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} - 2.$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Καμμία άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΡΑΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΤΡΙΜΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ο Ι