

ΑΝΑΛΥΣΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**Λύσεις**

Υποδείξεις

1ο – 2ο – 3ο – Κεφ.

Συναρτήσεις, Παράγωγοι, Ολοκληρώματα

ΑΠΡ 2024**ΘΕΜΑ Α****A1.**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

(μονάδες 7)

A2.

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

(μονάδες 4)

A3.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

(μονάδες 4)

A4. α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Λάθος, δ) Λάθος, ε) Σωστό
(5 x 2 = 10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x < -2$ είναι $f(x) = \frac{(x^2 + 5)(x + 2) - x(x^2 + 3)}{x(x + 2)} = \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2(x^2 + x + 5)}{x^2 + 2x}$, άρα για κάθε $x \in (-\infty, -2)$ η f είναι παραγωγίσιμη :

$$f'(x) = 2 \frac{(x^2 + x + 5)'(x^2 + 2x) - (x^2 + x + 5)(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} =$$

$$= 2 \frac{(2x+1)(x^2+2x) - (x^2+x+5)(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = \dots = 2 \frac{x^2-10x-10}{(x^2+2x)^2} \quad (\text{μον. 4})$$

Πράγματι· με $x < -2 \Leftrightarrow -10x > 20 \Leftrightarrow -10x - 10 > 10 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x^2 - 10x - 10 > x^2 + 10 > 0 \Rightarrow x^2 - 10x - 10 > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, -2)$ και
 $(x^2 + 2x)^2 > 0$, άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, -2)$,
 συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2)$.

(μον. 2)

B2. Στο $(-\infty, -2)$, εξετάζουμε το $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2(x^2 + x + 5)}{x(x+2)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x^2 + x + 5}{x} \cdot \frac{1}{x+2} \right) = +\infty, \text{ αφού}$$

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + x + 5}{x} = -\frac{7}{2} < 0$ και (μον. 2)

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0$, $x < -2 \Leftrightarrow x+2 < 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$ (μον. 2)

Συνεπώς είναι $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ και η ευθεία $\varepsilon : x = -2$ είναι η μοναδική

κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού στο $(-\infty, -2)$ η f είναι ορισμένη και συνεχής. (μον. 1)

B3. Είναι $f(A) = f((-\infty, -2)) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x))$, αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2)$. (μον. 2)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ (μον. 3)

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, από το B2, (μον. 1)

Άρα $f(A) = (2, +\infty)$

(μον. 1)

B4. Για $\alpha > 0$ είναι $f^3(x_0) - (2+\alpha)f^2(x_0) + 2f(x_0) - 2(2+\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f^2(x_0)[f(x_0) - (2+\alpha)] + 2[f(x_0) - (2+\alpha)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(x_0) - (2+\alpha)][f^2(x_0) + 2] = 0, \text{ με } f^2(x_0) + 2 > 0, \text{ για κάθε } x_0 \in A \text{ αρκεί}$$

$$\text{να υπάρξει } x_0 \in A \text{ ώστε } f(x_0) - (2+\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = (2+\alpha) \quad (\text{μον. 4})$$

Πράγματι· ο αριθμός $2+\alpha \in (2, +\infty) = f(A)$, αφού $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 > 2$, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει αριθμός $x_0 \in (-\infty, -2)$ ώστε $f(x_0) = 2+\alpha$.

Επίσης ο αριθμός x_0 είναι μοναδικός αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2)$, άρα και $1-1$ και η εξίσωση $f(x) = 2+\alpha$ έχει μοναδική λύση. (σχόλιο στο 1-1)

(μον. 3)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x)(1 + e^{f(x)}) = 2 \Leftrightarrow f'(x) + f'(x)e^{f(x)} = 2 \Leftrightarrow (f(x) + e^{f(x)})' = (2x)'$, από πορ. συν. Θ.Μ.Τ. στο $\mathbb{R}$, $f(x) + e^{f(x)} = 2x + c$, (1) (μον. 3)

Επίσης για $x = 0$, $f'(0) = \frac{2}{1 + e^{f(0)}} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{1 + e^{f(0)}} \Leftrightarrow 1 + e^{f(0)} = 2 \Leftrightarrow e^{f(0)} = 1$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0, (2), \text{ στην } (1), \text{ από } (2) \text{ έχουμε } f(0) + e^{f(0)} = 0 + c \Leftrightarrow e^0 = c \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } (1) \Leftrightarrow f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1, x \in \mathbb{R}. \quad (\text{μον. } 3)$$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}} > 0$, αφού $1 + e^{f(x)} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς f είναι αντιστρέψιμη. (μον. 1)

Οπότε $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, x \in \mathbb{R}, y \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, από υπόθεση, (μον. 1)

$$\text{έτσι από } \Gamma 1, y + e^y = 2f^{-1}(y) + 1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y + e^y - 1}{2}, y \in \mathbb{R}, \text{ συνεπώς:}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x + e^x - 1}{2}, x \in \mathbb{R}. \quad (\text{μον. } 2)$$

Αρκεί επίσης $f(0) = f^{-1}(0)$ και $f'(0) = f^{-1}'(0)$ για να έχουν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ κοινή εφαπτομένη (μον. 1)

$$\text{Πράγματι: } f(0) = f^{-1}(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 1 \text{ και } (f^{-1}(x))' = \frac{1}{2} + \frac{e^x}{2},$$

$$f^{-1}'(0) = \frac{1}{2} + \frac{e^0}{2} = 1, \text{ οπότε η κοινή εφαπτομένη είναι } \varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \\ \Leftrightarrow y = 1x \Leftrightarrow y = x. \quad (\text{μον. } 2)$$

Γ3. Για $x \in \mathbb{R}$, είναι $f''(x) = 2((1 + e^{f(x)})^{-1})' = -2(1 + e^{f(x)})^{-2} \cdot (1 + e^{f(x)})' =$
 $= -2(1 + e^{f(x)})^{-2} \cdot (e^{f(x)} \cdot f'(x)) \Rightarrow f''(x) = \frac{-2e^{f(x)} \cdot f'(x)}{(1 + e^{f(x)})^2} < 0, \quad (\text{μον. } 2) \text{ αφού}$

$$\frac{-2}{(1 + e^{f(x)})^2} < 0, e^{f(x)} > 0 \text{ και } f'(x) > 0, \text{ οπότε η } f \text{ είναι κοίλη στο } \mathbb{R}. \quad (\text{μον. } 1)$$

Από σχόλιο κυρτότητας, αφού η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, οποιαδήποτε εφαπτομένη ευθεία της, βρίσκεται πάνω από την C_f . Κοινό σημείο της C_f με την αντίστοιχη εφαπτομένη είναι μόνο το σημείο επαφής τους.

Άρα $f(x) \leq g(x)$, όπου $g(x) = x$, η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο $O(0, 0)$ από $\Gamma 2$.

Συνεπώς $f(x) \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, αφού $f(0) = 0$. (μον. 2)

Γ4. Το ζητούμενο εμβαδό $E(\Omega) = \int_0^1 |f(x) - x| dx$ και αφού από $\Gamma 3$, είναι $x \geq f(x)$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα και για κάθε } x \in [0, 1]. \text{ Είναι } E(\Omega) = \int_0^1 (x - f(x)) dx =$$

$$= \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx = I_1 - I_2 \quad (\text{μον. } 1)$$

$$\bullet I_1 = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^1 f(x) dx, \text{ θέτοντας } u = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(u) = x, (1), \text{ άρα } dx = (f^{-1}(u))' du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{e^u}{2}\right) du, \quad (2), \text{ αφού } f^{-1}(u) = \frac{u + e^u - 1}{2}, \text{ από } \Gamma 2.$$

Επίσης για $x = 0$, $u_1 = f(0) = 0$ και για $x = 1$, $u_2 = f(1)$, (3), (μον. 2)
οπότε από (1), (2) και (3) είναι :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{f(1)} u \left(\frac{1}{2} + \frac{e^u}{2}\right) du = \int_0^{f(1)} \frac{u}{2} du + \int_0^{f(1)} \frac{u \cdot e^u}{2} du = \\ &= \left[\frac{u^2}{4}\right]_0^{f(1)} + \frac{1}{2} \int_0^{f(1)} u \cdot e^u du = \left[\frac{u^2}{4}\right]_0^{f(1)} + \frac{1}{2} \int_0^{f(1)} u \cdot (e^u)' du = \\ &= \left[\frac{u^2}{4}\right]_0^{f(1)} + \frac{1}{2} \left\{ [u \cdot e^u]_0^{f(1)} - \int_0^{f(1)} e^u du \right\} = \left[\frac{u^2}{4}\right]_0^{f(1)} + \frac{1}{2} \{ [u \cdot e^u]_0^{f(1)} - [e^u]_0^{f(1)} \} \\ &= \frac{f^2(1)}{4} + \frac{1}{2} f(1) e^{f(1)} - \frac{1}{2} e^{f(1)} + \frac{1}{2}, \text{ αλλά για } x = 1 \text{ από } \Gamma 1, f(1) + e^{f(1)} = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{f(1)} = 3 - f(1), \quad (4), \text{ οπότε η (4) στο :} \\ I_2 &= \frac{f^2(1)}{4} + \frac{1}{2} f(1) [3 - f(1)] - \frac{1}{2} [3 - f(1)] + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{f^2(1)}{4} + \frac{3}{2} f(1) - \frac{1}{2} f^2(1) - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} \Rightarrow I_2 = -\frac{f^2(1)}{4} + \frac{8}{4} f(1) - \frac{4}{4}. \\ \text{Συνεπώς } E(\Omega) &= I_1 - I_2 = \frac{1}{2} - \left[-\frac{f^2(1)}{4} + \frac{8}{4} f(1) - \frac{4}{4}\right] = \frac{(f(1))^2 - 8f(1) + 6}{4} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2$,

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad f^{(3)}(x) = e^x + \frac{2}{x^3}.$$

Είναι $f^{(3)}(x) > 0$ άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f''((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)\right) = \mathbb{R}$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = -\infty$,

$$\text{επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \text{ επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \quad (\text{μον. 3})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty. \text{ Το } 0 \in f''((0, +\infty)) \text{ άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει αριθμός}$$

$x_0 > 0$, ώστε $f''(x_0) = 0$. Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f'' είναι γνησίως αύξουσα.

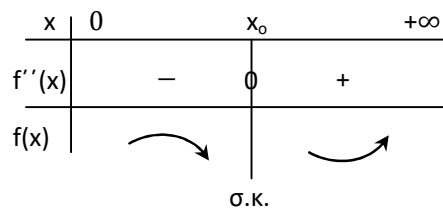
$$\text{Επίσης για κάθε } x > x_0 \Leftrightarrow f''(x) > f''(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) > 0 \text{ και}$$

$$\text{για κάθε } 0 < x < x_0 \Leftrightarrow f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''(x) < 0, \text{ έτσι :}$$

η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, άρα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$, κυρτή στο $[x_0, +\infty)$, οπότε έχει μοναδικό σημείο καμπής το $(x_0, f(x_0))$.



(μον. 4)

Δ2. Είναι $f''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 4 < 0$, $f''(1) = e - 1 > 0$, οπότε $f''\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f''(1) < 0$.

Η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano

οπότε η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ως

γνησίως αύξουσα, η οποία είναι το x_0 (από το Δ1), άρα $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

δηλ. $\frac{1}{2} < x_0 < 1$. (μον. 5)

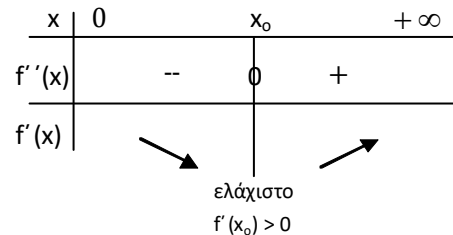
Δ3. Είναι $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0^2}$ οπότε $f'(x_0) = e^{x_0} + \frac{1}{x_0} - 2 =$

$$= \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0} - 2 = \frac{-2x_0^2 + x_0 + 1}{x_0^2} = \frac{-2(x_0 - 1)\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)}{x_0^2} > 0, \text{ αφού } \frac{1}{2} < x_0 < 1.$$

(μον. 3)

Από Δ1 είδαμε $x > x_0 \Leftrightarrow f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και $f' \uparrow [x_0, +\infty)$,

για κάθε $0 < x < x_0 \Leftrightarrow f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) < 0$ και $f' \downarrow (0, x_0]$, έτσι η f' έχει ελάχιστο στο x_0 , δηλ. $f'(x) \geq f'(x_0) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. **(μον. 4)**



Δ4. Για τις συναρτήσεις f , $g(x) = e^x$ και $h(x) = \ln x$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$, άρα υπάρχουν αριθμοί ξ_1, ξ_2 και $\xi_3 \in (\alpha, \beta)$ ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}, (1), \quad g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow e^{\xi_2} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}, (2) \text{ και}$$

$$h'(\xi_3) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\xi_3} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha}, (3), \text{ κατόπιν από (1):}$$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta + \ln \beta - 2\beta - e^\alpha - \ln \alpha + 2\alpha}{\beta - \alpha} =$$

$$= \frac{e^\beta - e^\alpha + \ln \beta - \ln \alpha - (2\beta - 2\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} - 2 \stackrel{(2), (3)}{=} =$$

$$= e^{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} - 2 \Rightarrow f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} - 2.$$

(μον. 6)