

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
5ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
ΠΕΜΠΤΗ 12 ΜΑΪΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ο. Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : Τρεις (3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι, αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

- A2.** Πότε η ευθεία $y = \lambda$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

- A3.** Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

τότε η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$, με κλίση $\lambda = 1$.

- β.** Εάν μια συνάρτηση f είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού, τότε κατ' ανάγκη έχει ένα σημείο καμπής.

- γ.** Εάν συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$$

- δ.** Κάθε συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

- ε.** Η τιμή της f στο $x_0 \in A$, όπου A το πεδίο ορισμού της f , είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - \ln(1-x)$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x}, & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} . (μονάδες 3)

Μονάδες 6

- B2.** Να αποδείξετε ότι συνάρτηση g είναι συνεχής στο 0 (μονάδες 3) και να εξετάσετε αν η γραφική της παράστασή της έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες (μονάδες 3).

Μονάδες 6

- B3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f^{-1} και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 6

- B4.** Να αποδείξετε ότι, αν $\alpha > 0$ και ισχύει $(3\alpha)^{f(x)} + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{f(x)} \geq 2$, για κάθε $x \in (0, 1)$, τότε $\alpha = 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + \frac{x^2 - 1}{2}$.

- Γ1.** Να βρείτε τις συναρτήσεις f' , f'' και να προσδιορίσετε το $x_0 \in (0, +\infty)$ για το οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f' και f'' παίρνει τη μικρότερη τιμή.
($A \in C f'$ και $B \in C f''$)

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ως δεδομένο ότι $x_0 = 2$.

- Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της $C f''$ στο σημείο $B(x_0, f''(x_0))$.

Μονάδες 5

- Γ3.** Αν η ευθεία ε είναι $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι η ε και η γραφική παράσταση της f έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο M , το οποίο και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 6

- Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ και $\zeta: x = x_0$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 2x f(x) \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) \quad \text{και} \quad f(-1) = f(1) = 2e.$$

- Δ1.** Αν η C_f έχει μοναδική οριζόντια εφαπτομένη, στο $x_0 = 0$, την ευθεία $\varepsilon : y = 1$, να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδικό ελάχιστο το οποίο και να υπολογίσετε.

Μονάδες 8

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η f , στο διάστημα $[0, +\infty)$, είναι κυρτή.

Μονάδες 6

- Δ3.** Για $x > 1$, να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$6ex - 4e < f(x) < f'(x)(x - 1) + f(1)$$

Μονάδες 6

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2 + 1} dt \right) = +\infty$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Καμμία άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΡΑΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΤΡΙΜΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ