Μαθηματικά προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

3ωρο Διαγώνισμα
ΜΑΪΟΣ 2022

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A1

- Αν F παράγουσα της f είναι $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \Delta$ οπότε $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ άρα η G είναι παράγουσα της f.
- Αν G παράγουσα της f τότε $G'(x) = f(x)$, άρα $G'(x) = F'(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

A2. Η $\varepsilon: y = \lambda$, ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ αν $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda] = 0$.

A3. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 ονομάζεται θέση του τοπικού ελαχίστου και $f(x_0)$ είναι το τοπικό ελάχιστο.

A4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Λάθος,
δ. Σωστό, ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = \ln x - \ln(1-x) \Rightarrow$

Β1. $f(x) = \ln \dfrac{x}{1-x}$ για $\begin{cases} x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<1 \end{cases}$ δηλ $x \in (0,1)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1)$

$\Rightarrow \ln \dfrac{x_1}{1-x_1} = \ln \dfrac{x_2}{1-x_2} \overset{[y=\ln x,\ 1-1]}{\Rightarrow} \dfrac{x_1}{1-x_1} = \dfrac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, άρα η f 1-1,

οπότε και αντιστρέψιμη.

Ισχύει ότι $y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$, $\quad x \in (0,1)$
$\quad y \in f(0,1)$

οπότε $y = \ln \dfrac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y = \dfrac{x}{1-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-x)e^y = x \Leftrightarrow e^y - xe^y = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + xe^y = e^y \Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{e^y}{1+e^y}$ αλλά $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{e^y}{1+e^y} < 1$

$\Leftrightarrow 0 < e^y < 1 + e^y \quad (1+e^y>0)$

ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y}{1+e^y}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε

$f^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

$y \in \mathbb{R}$, β' τρόπος
αφού η $f \uparrow$
και $f((0,1)) =$
$= \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right) =$
$= (-\infty, +\infty)$

B2. Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$, για να είναι η g συνεχής στο 0.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\cdot\frac{1}{\ln x}\right] \underset{(1)}{=} 0 = g(0)$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = -1 < 0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x} = 0$

Από (1) η g είναι, πράγματι, συνεχής στο 0.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1)$ και στο $(1,+\infty)$ ως πράξη συνεχών, άρα εξετάζουμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} x = 1.$$

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

B3. Αν υπάρχει σημείο $x_0 \in (0,1)$ ώστε οι $C_{f^{-1}}$ και C_g να έχουν κοινό σημείο, πρέπει $f^{-1}(x_0) = g(x_0) \overset{B1}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}} = \frac{x_0-1}{\ln x_0}$$

Θέτουμε $h(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - \dfrac{x-1}{\ln x}$

η οποία είναι συνεχής στο $[0,1)$ από Β1.

- $h(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} - 0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{\ln x} = g(0) = 0$ λόγω της συνέχειας της g στο 0

$= \dfrac{1}{2} > 0$

- Είναι επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x} - \dfrac{x-1}{\ln x}\right) =$

$= \dfrac{e}{1+e} - 1$, | αφού από Β2 $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$

$= \dfrac{e-(1+e)}{1+e} =$

$= \dfrac{e-1-e}{1+e} = -\dfrac{1}{1+e} < 0$

οπότε υπάρχει αριθμός $\beta < 1$ (κοντά στο 1) ώστε $h(\beta) < 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) < 0$ (όριο & διάταξη Θ.Ι)

οπότε $h(0)\cdot h(\beta) < 0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,\beta) \subset [0,1)$ ώστε $h(x_0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$

B 4. Θέτουμε $\phi(x) = (3a)^{f(x)} + \left(\frac{a}{3}\right)^{f(x)}$ με $\phi(x) \geq 2$

άρα για $f(x) = 0 \iff \ln x = \ln(1-x) \iff$

$x = 1-x$ με $x \in (0,1)$

η $y = \ln x$ 1-1

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Άρα $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = (3a)^{f\left(\frac{1}{2}\right)} + \left(\frac{a}{3}\right)^{f\left(\frac{1}{2}\right)} =$, $a > 0$

$= (3a)^0 + \left(\frac{a}{3}\right)^0 = 2$

οπότε ισχύει $\phi(x) \geq \phi\left(\frac{1}{2}\right)$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $a > 0$

συνεπώς η ϕ παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{2}$ εσωτερικό σημείο, αφού $\frac{1}{2} \in (0,1)$ και η ϕ παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$, οπότε από Θ. Fermat είναι $\phi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ με $\phi'(x) = \left(e^{f(x)\ln(3a)} + e^{f(x)\ln\frac{a}{3}}\right)' =$

$= e^{f(x)\cdot\ln(3a)} \cdot \ln(3a) \cdot f'(x) + e^{f(x)\ln\frac{a}{3}} \cdot \ln\frac{a}{3}\, f'(x) =$

$= \left[(3a)^{f(x)}\ln(3a) + \left(\frac{a}{3}\right)^{f(x)}\ln\frac{a}{3}\right] f'(x) =$

$= \left[(3a)^{f(x)}\ln(3a) + \left(\frac{a}{3}\right)^{f(x)}\ln\frac{a}{3}\right] \left(\ln x - \ln(1-x)\right)' =$

$= \left[(3a)^{f(x)}\ln(3a) + \left(\frac{a}{3}\right)^{f(x)}\ln\frac{a}{3}\right] \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right), \quad (2)$

Συνεπώς $\phi'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow$ $\quad\left[f\left(\frac{1}{2}\right)=0\right]$

$$\Rightarrow \left[(3a)^{f\left(\frac{1}{2}\right)} \ln(3a) + \left(\frac{a}{3}\right)^{f\left(\frac{1}{2}\right)} \ln\frac{a}{3}\right](2+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left((3a)^{0} \ln(3a) + \left(\frac{a}{3}\right)^{0} \ln\frac{a}{3}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(3a) + \ln\frac{a}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left[(3a)\cdot\frac{a}{3}\right]=0 \Rightarrow \ln a^2 = 0 \Rightarrow$$

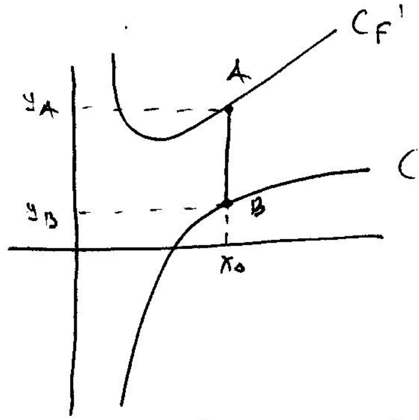
$$\Rightarrow \ln a^2 = \ln 1 \xRightarrow{y=\ln x \ 1-1} a^2=1 \Rightarrow |a|=1 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[|a|=a]{a>0} \underline{a=1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x>0$, $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{2x}{2} = \frac{2}{x} + x$, (1)

και $f''(x) = -\frac{2}{x^2} + 1 = \frac{x^2-2}{x^2}$, (2)



Η απόσταση $(AB) = d(x) =$

$= \sqrt{(y_A - y_B)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{2}{x} + x + \frac{2}{x^2} - 1\right)^2}$

Ελαχιστοποιούμε την $d(x)$, $x>0$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{2}{x}+x+\frac{2}{x^2}-1\right)^2}} \cdot \left(\frac{2}{x}+x+\frac{2}{x^2}\right)' =$$

$$= \frac{-\frac{2}{x^2}+1+2(-2)x^{-3}}{2\sqrt{\left(\frac{2}{x}+x+\frac{2}{x^2}-1\right)^2}} = \frac{-\frac{2}{x^2}+1-\frac{4}{x^3}}{2\sqrt{\left(\frac{2}{x}+x+\frac{2}{x^2}-1\right)^2}}$$

οπότε $d'(x)=0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2x+4}{x^3} \Leftrightarrow x^3-2x-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x)=0$

$x_0=2$ προφανής ρίζα.

Horner στο $P(x)$

1	0	−2	−4	$\rho=2$
	2	4	4	
1	2	2	0	

Άρα $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2$ μοναδική ρίζα, αφού

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$

Άρα $d'(x) = \dfrac{\dfrac{-2x+x^3-4}{x^3}}{2\sqrt{\left(\frac{2}{x}+x+\frac{2}{x^2}-1\right)^2}} = \dfrac{p(x)}{2x^3\sqrt{\left(\frac{2}{x}+x+\frac{2}{x^2}-1\right)^2}}$

Πρόσημο του $p(x)$ είναι το πρόσημο της d'

x	0		2	$+\infty$
$(x-2)$		$-$	0	$+$
x^2+2x+2		$+$		$+$
$p(x)$		$-$		$+$
$d(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

ελάχιστο

$d(2)$

Άρα η θέση του ελαχίστου είναι $x_0 = 2$

Γ2. Η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι ε:

$$y - f''(2) = f'''(2)(x-2)$$

όπου $f''(2) = -\frac{2}{4} + 1 = \frac{1}{2}$

επίσης $f'''(x) = -2 \cdot (-2)\, x^{-3} = \frac{4}{x^3}$

$$f'''(2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Άρα ε: $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

B3. Για το κοινό σημείο της C_f με την ε,

αρκεί να λυθεί η εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\ln x + \frac{x^2-1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\ln x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x \Rightarrow 4\ln x + x^2 - x = 0$$

Θέτουμε $g(x) = 4\ln x + x^2 - x$

Προφανής ρίζα $x_1 = 1$, $g(1) = 4\ln 1 + 1 - 1 = 0$

Επίσης $g'(x) = 4\frac{1}{x} + 2x - 1 = \frac{4+2x^2-x}{x}$, $x>0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot 4 = 1 - 32 < 0$ άρα $g'(x) > 0$ $\forall x > 0$

αφού $2x^2 - x + 4 > 0$ για κάθε $x > 0$

οπότε η $g \nearrow / (0, +\infty)$, άρα και 1-1

οπότε $g(x) = 0 = g(1) \Leftrightarrow x = 1$ μοναδική ρίζα

οπότε το ζητούμενο σημείο είναι $M(1, f(1))$

δηλ. $M(1, 0)$, αφού $f(1) = 0$.

Επίσης για κάθε $x > 1 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Γ4. Ζητάμε το $E(\Omega)=\int_1^2 |f(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}|\,dx$,

από το προηγούμενο ερώτημα Γ3 είναι

$f(x)\geq \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ για κάθε $x\geq 1$

άρα $f(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\geq 0$ για κάθε $x\geq 1$

οπότε $|f(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}|=f(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$,

συνεπώς,

$$E(\Omega)=\int_1^2 \left(\frac{g(x)}{2}\right)dx=\int_1^2\left(2\ln x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\right)dx=$$

$$=2\left[x\ln x-x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2=$$

είναι $(x\ln x-x)'=$
$=\ln x+1-1=$
$=\ln x,\ x>0$

$$=2\left(2\ln 2-2-\ln 1+1\right)+$$

$$+\frac{8}{6}-\frac{1}{6}-\left(1-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=4\ln 2-2+\frac{7}{6}-\frac{3}{4}=4\ln 2-\frac{24}{12}+\frac{14}{12}-\frac{9}{12}=$$

$$=4\ln 2-\frac{19}{12}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η C_f έχει μοναδική οριζόντια εφαπτόμενη στο $x_0=0$ την $\varepsilon: y=1$, άρα $f'(0)=0$ και είναι μοναδικό. Η f' δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^*$ και ως συνεχής, αφού είναι πράξεις συνεχών συναρτήσεων, διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

- Για $x<0$ και η f διατηρεί πρόσημο γιατί αν υπήρχε $x_1<0$ ώστε $f(x_1)=0$ τότε και $f'(x_1)=0$, άτοπο, άρα η $f(x)>0$ αφού $f(-1)=2e>0$, οπότε από (1), $f'(x)<0$ αφού $x<0$, $f(x)>0$ και $1+\dfrac{1}{x^2+1}>0$.
Οπότε η $f \downarrow \mid (-\infty, 0]$

- Για $x>0$ και $f(x)>0$, αφού $f(1)=2e$ και η f διατηρεί πρόσημο και $1+\dfrac{1}{x^2+1}>0$, οπότε $f'(x)>0$, συνεπώς $f \uparrow \mid [0, +\infty)$

Ισχύει:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(0)$ ελάχιστο	$\nearrow$

Από $\varepsilon: y=1$ και $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y=f'(0)x+f(0) \Rightarrow y=f(0)$ άρα $f(0)=1$

Δ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη αφού είναι γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = 2f(x)\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) + 2f'(x)\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) +$$

$$+\, 2x f(x)\left(-(x^2+1)^{-2}\cdot 2x\right) =$$

$$= 2f(x)\left(1+\frac{1}{x^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\right) + 2f'(x)\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) =$$

$$= 2f(x)\,\frac{(x^2+1)^2 + x^2+1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} + 2f'(x)\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) =$$

$$= 2f(x)\,\frac{x^4+2x^2+1+x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} + 2f'(x)\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) =$$

$$= 2f(x)\,\frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2} + 2f'(x)\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) > 0$$

αφού $f(x)>0$ και $f'(x)>0$ για $x>0$

$x^4+x^2+2>0$, $(x^2+1)^2>0$ και

$1+\frac{1}{x^2+1}>0$, οπότε

$f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$

Δ3. Η f ορισμένη και συνεχής στο $[1, x]$,

παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, οπότε

από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει αριθμός

$\xi \in (1, x)$ ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \quad , \quad (2)$$

Επίσης $\quad 1 < \xi < x \overset{f' \uparrow}{\Rightarrow}$ [αφού η f κυρτή από Δ2.]

$$f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}$$

$$2 \cdot 1\, f(1)\left(1 + \frac{1}{1^2+1}\right) < \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x) \Rightarrow$$

$$2 \cdot 2e \cdot \frac{3}{2} < \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x) \Rightarrow$$

[$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$]

$$6e(x-1) < f(x) - 2e < f'(x)(x-1) \underset{+2e}{\Rightarrow}$$

$$6ex - 6e + 2e < f(x) < f'(x)(x-1) + 2e$$

$$6ex - 4e < f(x) < f'(x)(x-1) + f(1)$$

Δ4. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+1}\,dt\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) \quad (3)$$

[είναι f(x) ανεξάρτητο του x και συνεπώς σταθερά ως προς την μεταβλητή t]

- Από Δ3. είναι $f(x) \geq 6ex - 4e$, (4)

και $\lim\limits_{x\to+\infty}(6ex - 4e) = +\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}(6ex) = +\infty$ είναι $6e > 0$

οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ από την (4)

- Επίσης $\dfrac{1}{t^2+1} > 0$, άρα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt > 0$, (5)

οπότε από (3), (5) είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt \cdot \lim_{x\to+\infty} f(x) =$$

$$= +\infty$$