

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
5ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
ΤΕΤΑΡΤΗ 26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ο. Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : Τρεις (3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .
- Μονάδες 7**
- A2.** Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;
- Μονάδες 4**
- A3.** Τι ονομάζουμε παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
- Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Κάθε συνάρτηση $f(x)$, με $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.
- β.** Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων.
- γ.** Αν
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$
- τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
- δ.** Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- ε.** Κάθε συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές, δηλ. για κάθε αριθμό η , μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \eta$.
- Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

- B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα (αν υπάρχουν).

Μονάδες 4

- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν).

Μονάδες 5

- B3.** Να βρείτε το πλήθος και το πρόσημο των λύσεων της εξίσωσης : $f(x) = 2023$.

Μονάδες 8

- B4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x(x\alpha - 1) = \alpha$, για $\alpha < 0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f'(1) = f(1) = 1, \quad f(x) \neq 0, \quad \text{για κάθε } x > 0 \quad \text{και}$$

$$f''(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, για $x > 0$ (μονάδες 4) και κατόπιν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, (μονάδες 3).

Μονάδες 7

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι : $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$, για $x > 0$.

Μονάδες 6

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $[1, 2]$.

Μονάδες 5

- Γ4.** Να αποδείξετε ότι :

$$2 \int_1^2 x f(x) dx + \int_{f(1)}^{f(2)} (f^{-1}(x))^2 dx = 4\sqrt{e} - 1$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

τη συνάρτηση $g(x) = \ln f(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $h(x)$ για την οποία είναι :

$$h(x) + f(\beta)x = x^2 + f(\alpha)x + 1, \text{ με } h(x) \geq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha < \beta.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) = f(\beta)$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_g στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη της C_g παράλληλη στη διχοτόμο της $1^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$g(\rho) = \ln f(\alpha) + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \rho)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) > -\frac{f(\xi)}{2}.$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Καμμία άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΡΑΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΤΡΙΜΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ