Μαθ/τικά Ο.Π.
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
Επανάληψη
1ο - 2ο - 3ο κεφ
Ανάλυσης

3ο
προσομοίωση
ΑΠΡ - ΜΑΙΟΣ 2023

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, θα δείξουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$
- Αν $x_1 < x_2$ τότε στο $[x_1, x_2]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f, οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, αλλά $f'(\xi) = 0$, αφού είναι εσωτερικό του $(x_1, x_2) \subseteq \Delta$,

οπότε $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$.

Ομοίως ισχύει αν $x_2 < x_1$, άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και η f είναι σταθερή στο Δ.

Α2. Γραφική παράσταση της f ονομάζεται το σύνολο των σημείων $M(x, y)$, όπου $y = f(x)$, για κάθε $x \in A$, δηλ. $M(x, f(x))$, $x \in A$ και συμβολίζεται με C_f.

Α3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Παράγουσα ή αρχική συνάρτηση της f στο Δ, ονομάζεται η συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Α4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό,

δ. Λάθος, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, είναι:

$$f'(x) = \frac{(x)'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα απ' τα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$ αφού $f'(x)<0$ και η f συνεχής στα αντίστοιχα διαστήματα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
f		↘	‖	↘	‖	↘	

Ακρότατα η f δεν παρουσιάζει.

Β2. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, έχουμε:

$$f''(x) = -\frac{(x^2+1)'(x^2-1)^2 - (x^2+1)\left[(x^2-1)^2\right]'}{(x^2-1)^4} =$$

$$= -\frac{2x(x^2-1)^2 - 2(x^2+1)(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x(x^2-1)\left[(x^2-1)-2(x^2+1)\right]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= -\frac{2x(x^2-1)(x^2-1-2x^2-2)}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x(x^2-1)(-x^2-3)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4}$$

, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ απορ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^2-1		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f		∩	‖	∪		∩	‖	∪	
					σ.κ.				

Η $f''(x)<0$ στα $(-\infty,-1)$ και $(0,1)$, οπότε η f είναι κοίλη στα $(-\infty,-1)$ και $[0,1)$ ενώ η $f''(x)>0$ στα $(-1,0)$ και $(1,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στα $(-1,0]$ και $(1,+\infty)$.

Η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $O(0,0)$ (ορίζεται η $f'(0)=-1$, οπότε και η εφαπτομένη στο 0)

B3. Για το σύνολο τιμών της f έχουμε:
$\Delta_1=(-\infty,-1)$, $\Delta_2=(-1,1)$ και $\Delta_3=(1,+\infty)$

- $f(\Delta_1)\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to -1^-}f(x),\ \lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right)$ με

  - $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\dfrac{1}{x+1}\right]=-\infty,$

    αφού $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}>0$ και $x<-1\Rightarrow x+1<0$

    άρα $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$

  - $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0,$

  άρα $\boxed{f(\Delta_1)=(-\infty,0)}$.

- $f(\Delta_2)\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to 1^-}f(x),\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)\right)$

  - $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\dfrac{1}{x+1}\right]=+\infty,$

    αφού ομοίως $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}>0$, επί $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$

    γιατί $x+1>0$

  - $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{1}{x-1}\right]=-\infty,$

    αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}>0$, επί $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty,$

    γιατί $x-1<0$

  άρα $\boxed{f(\Delta_2)=(-\infty,+\infty)}$

- $f(\Delta_3)\overset{f\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to +\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\right)$

  - $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{1}{x-1}\right]=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}>0$

    και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, $x-1>0$, επί $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$

  άρα $\boxed{f(\Delta_3)=(0,+\infty)}$ συνέχεια ...

- Από τα σύνολα τιμών σε κάθε υποδιάστημα του D_f έχουμε ότι:
  - ▸ Το $2023 \notin f(\Delta_1)$, οπότε δεν υπάρχει ρίζα της αντίστοιχης εξίσωσης στο Δ_1.
  - ▸ Το $2023 \in f(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει αριθμός $x_1 \in (-1,1)$ ώστε $f(x_1)=2023$ από Θ.Ε.Τ. και μάλιστα μοναδικός, επίσης $-1<x_1<0$ γιατί η $f \downarrow$ και $x_1<0 \Rightarrow f(x_1)>f(0) \Rightarrow 2023>0$ που ισχύει, άρα η ρίζα x_1 είναι αρνητική.
  - ▸ Το $2023 \in f(\Delta_3)$ οπότε υπάρχει και μοναδικός αριθμός $x_2 \in (1,+\infty)$ δηλ. $x_2>1>0$ ώστε $f(x_2)=2023$ και x_2 θετική ρίζα.

Άρα η εξίσωση $f(x)=2023$ έχει δύο ρίζες ακριβώς $x_1 \in (-1,0)$ και $x_2>1$.

Β4. Η δοσμένη εξίσωση γίνεται $x^2 a - x = a \overset{\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x^2 a - a = x \overset{\forall x\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} a(x^2-1)=x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2-1}=a$ για $x\neq\pm1$

$\Leftrightarrow f(x)=a$ για $x\neq\pm1$ και $a<0$

- ▸ Οπότε όπως και στο Β3, έχουμε:
  - $a \in f(\Delta_1)=(-\infty,0)$, αφού $a<0$ και υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty,0)$ ώστε $f(\rho_1)=a$ με ρ_1 μοναδική ρίζα, αρνητική.
  - $a \in f(\Delta_2)=(-\infty,+\infty)$ και αφού $a<0$ και $f\downarrow$ υπάρχει $\rho_2 \in (-\infty,+\infty)$ και μάλιστα $\rho_2>0 \Rightarrow f(\rho_2)<f(0) \Rightarrow a<0$ που ισχύει (υπόθεση).
  - Τέλος $a \notin f(\Delta_3)$ αφού $a<0$ ενώ $f(\Delta_3)=(0,+\infty)$.
  - Οπότε η $f(x)=a$, έχει μόνο 2 ρίζες ετερόσημες.
- ▸ Τέλος $x=1$ ή $x=-1$ δεν είναι της αρχικής εξίσωσης αφού για $x=1$, $a-1=a$ άτοπο και για $x=-1$, $a+1=a$, άτοπο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. • Είναι $f''(x)=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4} \Leftrightarrow f''(x)=\frac{x^2f'(x)-(x^2)'f(x)}{(x^2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f''(x)=\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'$ από πόρισμα συν. Θ.Μ.Τ για $x>0$

είναι $f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}+c_1$

για $x=1$ είναι $f'(1)=\frac{f(1)}{1}+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$ αφού από υπόθεση είναι $f'(1)=f(1)$

Άρα $f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, για $x>0$

• Επίσης $f(x)\neq 0$, για κάθε $x>0$ και η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη, άρα διατηρεί πρόσημο από συν. Θ. Bolzano με $f(1)=1>0$, είναι $f(x)>0$, $\forall x>0$ και $x^2>0$, στο $(0,+\infty)$ άρα $f'(x)>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Γ2. Αρκεί $\frac{f(x)}{e^{\frac{x-1}{x}}}=1 \Leftrightarrow f(x)\cdot e^{\frac{1-x}{x}}=1$ δηλ. η

$g(x)=f(x)\cdot e^{\frac{1-x}{x}}$ σταθερή, πράγματι.

$g'(x)=f'(x)\cdot e^{\frac{1-x}{x}}+f(x)\cdot e^{\frac{1-x}{x}}\left(\frac{1-x}{x}\right)'=$

$=f'(x)\cdot e^{\frac{1-x}{x}}+f(x)\cdot e^{\frac{1-x}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$

$=e^{\frac{1-x}{x}}\left(f'(x)-\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$, αφού από Γ1 είναι

$f'(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, $x>0$, άρα από θεώρημα συνεπειών

Θ.Μ.Τ. στο $(0,+\infty)$ $g(x)=c_2$: σταθερά

για $x=1$ $g(1)=f(1)\cdot e^0=1=c_2$

Άρα $g(x)=1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{\frac{x-1}{x}}}=1 \Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{x-1}{x}}$, $x>0$

Γ3. Η $f \uparrow |(0,+\infty)$ άρα και 1-1 και υπάρχει η f^{-1}

με $D_{f^{-1}} = f((0,+\infty)) \overset{f\uparrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (0, e)$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0$

$$\left[\begin{array}{l} u = \frac{x-1}{x} \\ \text{αν } x\to 0^+ \\ u \to -\infty \quad \text{αφού } \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\infty \end{array}\right]$$

και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{u\to 1} e^u = e$

$$\left[\begin{array}{l} x\to +\infty \\ u \to 1, \quad \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{array}\right]$$

Άρα το $[1, 2] \subset (0, e)$, $\left[\begin{array}{l} \text{αν } y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \\ x\in(0,+\infty), \ y \in (0,e) \\ \text{και για } y_0 \in (0,e) \\ \text{και } x_0 = f^{-1}(y_0) \end{array}\right]$

Είναι $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$,

γιατί: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ αφού η f συνεχής στο $(0,+\infty)$

δηλ. $y \to y_0$

οπότε με $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f^{-1}(f(x)) = x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$, άρα η f^{-1} συνεχής στο $(0,e)$ άρα και στο $[1, 2]$.

Γ4. Είναι $I_1 = 2\int_1^2 x f(x)\,dx$ και $I_2 = \int_{f(1)}^{f(2)} (f^{-1}(x))^2 dx$

Θέτοντας $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$

για $x_1 = f(1) \Leftrightarrow f(u_1) = f(1) \Leftrightarrow u_1 = 1$ αφού f 1-1

και $x_2 = f(2) \Leftrightarrow f(u_2) = f(2) \Leftrightarrow u_2 = 2$ ομοίως

άρα $I_2 = \int_1^2 u^2 \cdot f'(u)\,du$ και

$I_1 = \int_1^2 2x f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2)' f(x)\,dx = [x^2 f(x)]_1^2 - \int_1^2 x^2 f'(x)\,dx$

Έτσι $I_1 + I_2 = [x^2 f(x)]_1^2 = 4f(2) - f(1) = 4e^{\frac{1}{2}} - 1\cdot e^0 = 4\sqrt{e} - 1$

Δ1. Είναι $h(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $x=0$ είναι $h(0)=1$ από την υπόθεση $h(x)+f(\beta)x = x^2+f(\alpha)x+1$

άρα $h(x) \geq h(0)$, οπότε $h(0)$ ελάχιστο της h στο $\mathbb{R}$ και από Θ. Fermat θα είναι $h'(0)=0$ με

$h'(x)+f(\beta) = 2x+f(\alpha)$, για $x=0$

$h'(0)+f(\beta) = f(\alpha) \Rightarrow f(\beta)=f(\alpha)$ αφού $h'(0)=0$

[η h είναι παραγωγίσιμη αφού $h(x) = x^2+(f(\alpha)-f(\beta))x+1$ που είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$].

Δ2. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g'(x_0)=1$, πράγματι από Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ στην f με $f(\alpha)=f(\beta)$ έχουμε αριθμό $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=0$

άρα $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}+1$ και για $x=x_0$ είναι

$g'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}+1 = 1 \Rightarrow g'(x_0)=1$ με $x_0 \in (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ $[f(x_0)>0]$

Δ3. Είναι $\alpha<\beta \Rightarrow \ln f(\alpha)+\alpha < \ln f(\alpha)+\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln f(\alpha)+\alpha < \ln f(\beta)+\beta \Rightarrow g(\alpha) < g(\beta)$

Επίσης $g(\alpha) < \dfrac{g(\alpha)+g(\beta)}{2} < g(\beta) \Leftrightarrow$

$g(\alpha) < \dfrac{\ln f(\alpha)+\alpha+\ln f(\beta)+\beta}{2} < g(\beta) \Leftrightarrow$

$g(\alpha) < \dfrac{2\ln f(\alpha)}{2}+\dfrac{\alpha+\beta}{2} < g(\beta) \Leftrightarrow$

$g(\alpha) < \ln f(\alpha)+\dfrac{\alpha+\beta}{2} < g(\beta)$

άρα η τιμή $\eta = \ln f(\alpha)+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ και από Θ.Ε.Τ. στην f στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει $\rho \in (\alpha,\beta)$ ώστε

$f(\rho) = \eta = \ln f(\alpha)+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Δ4. Ισχύει το Θ.Μ.Τ. στην g στο $[\alpha, \rho]$

οπότε υπάρχει αριθμός $\xi \in (\alpha, \rho) \subseteq (\alpha, \beta)$

με $$g'(\xi) = \frac{g(\rho)-g(\alpha)}{\rho-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + 1 \overset{(\Delta 3.)}{=} \frac{\ln f(\alpha) + \frac{\alpha+\beta}{2} - \ln f(\alpha) - \alpha}{\rho-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + 1 = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}{\rho-\alpha} = \frac{\frac{\alpha+\beta-2\alpha}{2}}{\rho-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta-\alpha}{\rho-\alpha},$$

$\Big[$ αλλά $\dfrac{\beta-\alpha}{\rho-\alpha} > 1 \overset{\rho-\alpha>0}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow \beta-\alpha > \rho-\alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \beta > \rho$ που ισχύει $\Big]$

άρα $$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + 1 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} > -\frac{1}{2}$$ και $f(\xi) > 0$, αφού $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(\xi) > -\frac{f(\xi)}{2}$$