

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ - ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
5ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ
..... ΜΑΪΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ο. Π. ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : Τρεις (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε, να αποδείξετε ότι, είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\int_a^b f(x)dx = 0$, τότε κατ'ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

β. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε οπωσδήποτε θα ισχύει ότι $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

γ. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$,

τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $+\infty$.

δ. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[a, b]$ με $f(b) < f(a)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$.

ε. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = \ln x$ και
 $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(x) = e - \frac{1}{x}$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 6

B2. Αν $f(x) = (g \circ h)(x) = \ln(e - \frac{1}{x})$, $x > \frac{1}{e}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και να βρεθεί η αντίστροφή της (μονάδες 5).

Μονάδες 7

B3. Αν $\varphi(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{e - e^x}$, $x < 1$, να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1)$ (μονάδες 2) και κατόπιν να βρείτε τις ασύμπτωτές της φ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι η C_φ έχει, στο διάστημα $(0, 1)$, εφαπτομένη ευθεία, παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = x$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x + \ln \lambda & , x < 0 \\ 2\eta\mu x - x + 1 - \lambda & , 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, όπου $\lambda > 0$.

Γ1. Να υπολογίσετε το λ .

Μονάδες 6

Για $\lambda = 1$,

Γ2. Να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Να αποδείξετε ότι : $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2} dx > \frac{-3}{2e}$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2\ln x + \int_1^x (f(t) - t^2 - 2) dt$, $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2\ln x + 2$, $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 με $x_0 \in (0, 1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$x_0^2 + 2 = \frac{2(1-x_0)}{\xi}.$$

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι :

i) $f(x) \leq x^2 + 2x$ για κάθε $x > 0$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.
(μονάδες 2)

ii) να αποδείξετε ότι $\frac{\xi+2}{f(\xi)} + \frac{\ln x_0}{1-x_0} > 0$ με $\xi \in (x_0, 1)$.
(μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Καμμία άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΡΑΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΤΡΙΜΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ο Ι