

ΑΝΑΛΥΣΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**Λύσεις**

Υποδείξεις

1ο – 2ο – 3ο – Κεφ.

Συναρτήσεις, Παράγωγοι, Ολοκληρώματα

ΜΑΙ 2025**ΘΕΜΑ Α****A1.**Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

(μονάδες 7)

A2.Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της :α) Δεν υπάρχει το όριο της στο x_0 ήβ) Υπάρχει το όριο της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

(μονάδες 4)

A3.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

(μονάδες 4)

A4. α) Λάθος, β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Σωστό, ε) Σωστό.

(5 x 2 = 10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

B1. Πρέπει να υπάρχει $A = \{x \in A_1 \mid h(x) \in A_2\}$ $\Delta\omega$
 $A = \{x > 0 \mid e - \frac{1}{x} > 0\}$ $\Delta\omega$.

από (1) $-\frac{1}{x} > -e \Leftrightarrow \frac{1}{x} < e \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$ (μον. 4)

Άρα $A = A_{f^{-1}} = (\frac{1}{e}, +\infty)$ $\neq \emptyset$
 $f(x) = (f \circ h)(x) = f(h(x)) = \ln h(x) = \ln(e - \frac{1}{x})$, $x > \frac{1}{e}$ (μον. 2)

B2. Η $f(x) = \ln(e - \frac{1}{x})$ ηγείται να είναι $\downarrow-1$, $x > \frac{1}{e}$
 παράγωγοι $f'(x) = \frac{1}{e - \frac{1}{x}} \cdot (e - \frac{1}{x})' = \frac{1}{e - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} > 0$, $x > \frac{1}{e}$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\frac{1}{e}, +\infty)$
 και κατά συνέπηση $\downarrow-1$, άρα και αντιστρέφεται (μον. 2)
 • Έτσι $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ και
 $y \in f((\frac{1}{e}, +\infty))$

$\Delta\omega$ $y = \ln(e - \frac{1}{x}) \Leftrightarrow e^y = e - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e - e^y \Leftrightarrow$
 $x = \frac{1}{e - e^y}$ $\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow e - e^y > 0$ φάω $\alpha \in \frac{1}{x} < e$
 $e > e - e^y$ και $e - e^y > 0$
 (μον. 3) $e > -e^y$ και $e^y < e$ (μον. 2)
 $e^y > 0$ $e^y < e^1$
 $\frac{1}{x} < e$ $y < 1$

Άρα $f^{-1}(y) = \frac{1}{e - e^y}$, $y < 1$, οπότε

$f^{-1}(x) = \frac{1}{e - e^x}$, $x < 1$.

B3. i) Για $x < 1$,

κατακόρυφο ασύμπτωτη για:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{e - e^x} = +\infty$,

φάω $\lim_{x \rightarrow 1^-} (e - e^x) = 0$ και για $x < 1 \Rightarrow e^x < e^1 \Leftrightarrow$
 $e - e^x > 0$,

οπότε η ευθεία $\varepsilon_1: x = 1$ είναι κατακόρυφη
 ασύμπτωτη. (μον. 2)

οριζόντιο πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e - e^x} = \frac{1}{e}$, φάω $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

άρα οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ να

ευθεία $\varepsilon_2: y = \frac{1}{e}$. (μον. 2)

ii) • Έτσι $\phi'(x) = (\frac{1}{e - e^x})' =$, $x < 1$

$= ((e - e^x)^{-1})' = -(e - e^x)^{-2} \cdot (e - e^x)' =$

$= -(e - e^x)^{-2} (-e^x) = (e - e^x)^{-2} e^x > 0$, $x < 1$

$\Delta\omega$ η $\phi \uparrow \mid (-\infty, 1)$ (μον. 2)

B4. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, ώστε

$$\phi'(x_0) = 1$$

Πρώτη από Β3 είναι

$$\phi'(x) = \frac{e^x}{(e - e^x)^2}$$

$$\text{οπότε } \phi'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x}{(e - e^x)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = (e - e^x)^2 \Leftrightarrow e^x = e^2 - 2e \cdot e^x + e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e \cdot e^x - e^x + e^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - e^x(2e + 1) + e^2 = 0 \quad (\text{μο.2})$$

$$\text{Θέτουμε } t(x) = e^{2x} - e^x(2e + 1) + e^2, \text{ συνεπώς}$$

έχει ορισμένη στο $[0, 1]$ η

$$\begin{aligned} \bullet \quad x = 0, \quad t(0) &= 1 - (2e + 1) + e^2 = 1 - 2e - 1 + e^2 = \\ &= e^2 - 2e = e(e - 2) > 0, \text{ ερως' ερως} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad x = 1, \quad t(1) = e^2 - e(2e + 1) + e^2 = 2e^2 - 2e^2 - 1 < 0$$

Άρα $t(0) \cdot t(1) < 0$, από Θ. Βολζανό.

συνεπώς στο $[0, 1]$, υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$

$$\text{ώστε } t(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{2x_0} = (e - e^{x_0})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{(e - e^{x_0})^2} = 1 \Leftrightarrow \phi'(x_0) = 1. \quad (\text{μο.4})$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f \in \mathcal{C}^1$ είναι συνεχής στο $(-\infty, \frac{\pi}{2}]$, άρα και στο $x_0 = 0$,

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0). \quad (1)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x e^x + \ln x) = 0 \cdot e^0 + \ln 1 = \ln 1, \quad (2)$$

$$\bullet \quad f(0) = 2 \ln 0 - 0 + 1 - 1 = 1 - 1, \quad (3)$$

Άρα (2), (3) $\Rightarrow \ln 1 = 1 - 1$.

Προφανώς ρίχνει είναι $\lambda = 1$, αφού $\ln 1 = 1 - 1$.

Θέτουμε $g(x) = \ln x - 1 + x$, $x > 0$

και $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ για $x > 0$, η $g \uparrow$ στο $(0, +\infty)$

άρα και $1 - 1$ οπότε $\lambda = 1$ είναι μοναδικό $\lambda < 1$.

$$\Gamma 2. \text{ Για } \lambda = 1, \quad f(x) = \begin{cases} x e^x, & x < 0 \\ 2\mu x - x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x < 0, \quad f'(x) &= e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x) \\ \text{και } f''(x) &= e^x(1+x) + e^x \cdot 1 = e^x(2+x) \\ f''(x) &= 0 \Leftrightarrow 2+x=0 \Leftrightarrow x=-2, \text{ αφού } e^x > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	(2)
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

$$\text{Για } x > 0, \quad f'(x) = 2\mu x - 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = -2\mu x < 0 \quad \text{με } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

Άρα από (2), (3) έχουμε

x	$-\infty$	-2	0	$\frac{\pi}{2}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\rightarrow$

$\rightarrow$ Η C_f έχει σημείο καμπής $A(-2, f(-2))$ και $O(0,0)$
 αφού αλλάζει κατεύθυνση η κυρτότητα και ορίζεται
 $f'(-2)$ η f είναι παραγώγιση στο $(-\infty, 0)$ άρα
 και στο $x_L = -2$. (ορίζεται φθίνουσα ενώ $\mathbb{R}$).
 Επίσης η f είναι παραγώγιση στο $x_0 = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\mu x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\mu x}{x} - 1 \right) = \\ &= 2 \cdot 1 - 1 = 1, \quad \text{άρα } f'(0) = 1 \quad \text{και ορίζεται} \\ &\text{φθίνουσα ενώ $\mathbb{R}$.} \end{aligned}$$

Γ3. Για $x < 0$, είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$
 Για $x \geq 0$ και $x < \frac{\pi}{2}$, $f'(x) = 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ αφού $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$
 (είναι $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ με $0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ ή $0 \leq 2k\pi - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$
 $-\frac{1}{3} \leq 2k < \frac{1}{6} \Leftrightarrow$
 $-\frac{1}{6} \leq k < \frac{1}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$
 άρα $k = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$
 με $0 \leq 2k\pi - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 2k < \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k < \frac{5}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$
 οδύνη

και $f'(0) = 1$ από Γ2 ερ.

Άρα

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	0	$-\frac{1}{e}$	0	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	1

Για $x = -2$, $f'(-2) = e^{-2}(1-2) < 0$
 Για $x = 0$, $f'(0) = 1 > 0$

και για $x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\sin x - 1) = 1 > 0$
 $\cdot f((-\infty, \frac{\pi}{2}]) = f((-\infty, -1]) \cup f((-1, \frac{\pi}{3}]) \cup f([\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}])$,

δηλαδή $f((-\infty, -1]) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{e}, 0)$

αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{1/x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$,

αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{1/x}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-e^u) = -\infty$

$\cdot f((-1, \frac{\pi}{3}]) \stackrel{f \uparrow}{=} (\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), f(\frac{\pi}{3})] = (f(-1), f(\frac{\pi}{3})) =$
 $= (-\frac{1}{e}, \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}] = (-\frac{1}{e}, \sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$

$\cdot f([\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]) \stackrel{f \downarrow}{=} [f(\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{3})] = [1, \sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$

Άρα $f((-\infty, \frac{\pi}{2}]) = [-\frac{1}{e}, \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}]$ αφού $-\frac{1}{e} < \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ και $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3} > 0$

Γ4. Είναι $f(x) \geq -\frac{1}{e}$ για κάθε $x \in [-2, -\frac{1}{2}]$

ή ισχύει ισχυρότερο για $x = -1$

άρα $\frac{1}{x^2} \cdot f(x) \geq -\frac{1}{e x^2}$ και σύμφωνα ισχύει

για κάθε $x \in [-2, -\frac{1}{2}]$, άρα

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2} dx \geq \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} -\frac{1}{e x^2} dx = -\frac{1}{e} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{-2} \right) = \frac{1}{e} \left(-2 + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{e} \left(-\frac{4}{2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2e}, \text{ άρα}$$

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2} dx \geq -\frac{3}{2e}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $k = \int_1^e (f(t) - t^2 - 2) dt$ ⁽¹⁾, $k \in \mathbb{R}$,

τότε από τη δεδομένη σχέση είναι:

$f(x) = x^2 + 2 \ln x + k$ ⁽²⁾ άρα από (1) είναι:

$$k = \int_1^e (t^2 + 2 \ln t - t^2 - 2 + k) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \int_1^e (2 \ln t - 2 + k) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 2 \int_1^e \ln t dt - 2 \int_1^e dt + k \int_1^e dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 2 [t \ln t - t]_1^e - 2(e-1) + k(e-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 2(e \ln e - e - \ln 1 + 1) - 2(e-1) + k(e-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 2(e - e + 1) - 2e + 2 + k \cdot e - k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 2 - 2e + 2 + ke - k \Rightarrow 2k - ke = 4 - 2e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(2-e) = 4-2e \Rightarrow k = \frac{2(2-e)}{2-e} \Rightarrow k=2.$$

Οπότε από (2) είναι: $f(x) = x^2 + 2 \ln x + 2$, $x > 0$

Δ2. Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $(0, 1]$ ως η σύνθεση συνεχών συνεχών συναρτήσεων (πολυωνυμική και λογαριθμική).

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2 \ln x + 2) = -\infty$,

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$,

οπότε υπάρχει αριθμός $a > 0$ ώστε $f(a) < 0$,

ακόμα $f(1) = 1 + 2 \ln 1 + 2 = 3 > 0$,

άρα $f(a) \cdot f(1) < 0$ και από Θ. Bolzano,

υπάρχει αριθμός $x_0 \in (a, 1) \subseteq (0, 1)$, $a > 0$,

ώστε $f(x_0) = 0$.

Επίσης $f'(x) = (x^2 + 2 \ln x + 2)' = 2x + 2 \cdot \frac{1}{x} > 0$,

αφού $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε και στο $(0, 1)$ και η f είναι μονότονη στο $(0, 1)$, οπότε και στο $(0, +\infty)$.

Δ3. Από Δ2 ερώτημα είναι

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 2\ln x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 2 = -2\ln x_0, (3)$$

μ $x_0 \in (0, 1)$ και μονωτικό.

Θεωρούμε $g(x) = 2\ln x$, ορισμένη και συνεχής

στο $[x_0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$,

οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x_0, 1)$ ώστε

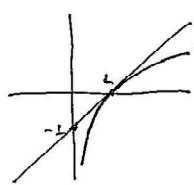
$$g'(\xi) = \frac{g(1) - g(x_0)}{1 - x_0}, \quad \mu \in g'(x) = \frac{2}{x} \text{ είναι}$$

$$\frac{2}{\xi} = \frac{2\ln 1 - 2\ln x_0}{1 - x_0} \Leftrightarrow \frac{2}{\xi} = \frac{-2\ln x_0}{1 - x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1 - x_0)}{\xi} = x_0^2 + 2 \text{ από (3)}$$

Δ4. 1) Αρκεί να δείξουμε ότι $x^2 + 2\ln x + 2 \leq x^2 + 2x, x > 0$

$$\Leftrightarrow 2\ln x \leq 2x - 2 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1, x > 0, \text{ που}$$



ισχύει από εφαρμογή της

σχετικού βιβλίου

και η ισότητα ισχύει

μόνο για $x = 1$.

ii) Από Δ4 i) για $\xi > 0$ και $\xi \neq 1$ αφού $\xi \in (x_0, 1)$

είναι $f(\xi) < \xi^2 + 2\xi$ (στην ισότητα + ισότητα)

$$\Leftrightarrow f(\xi) < \xi(\xi + 2) \text{ πολλαπλασιάζουμε με } \frac{1}{\xi \cdot f(\xi)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi} < \frac{\xi + 2}{f(\xi)} \text{ αφού } \xi > 0 \text{ και } x_0 < \xi < 1 \text{ από (Δ2.)}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) < f(\xi) < f(1)$$

$$\Leftrightarrow 0 < f(\xi) < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\xi} < \frac{2(\xi + 2)}{f(\xi)} \text{ (Δ3.)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 2}{1 - x_0} < \frac{2(\xi + 2)}{f(\xi)} \text{ (3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\ln x_0}{1 - x_0} < \frac{2(\xi + 2)}{f(\xi)} \text{ (3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\xi + 2}{f(\xi)} + \frac{\ln x_0}{1 - x_0} > 0, \quad \xi \in (x_0, 1)$$