

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Θετικού
προσανατολισμού

Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

Επανάληψη στις
συναρτήσεις

1β

1. Α. Να αιτιολογήσετε γιατί οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1 – 1 συνάρτηση και η f^{-1} είναι η αντίστροφή της.

B. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 - 2x + 14$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

(Απ. B. β) $A(2, 2)$

2. Α. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο A .

α) Να δείξετε ότι η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $f(A)$.
Το ερώτημα επεκτείνεται και στη περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

β) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες όταν η f γνησίως αύξουσα στο A .

B. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(x - 3) + x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

(Απ. B. β) $A(3 + e^2, 3 + e^2)$

3. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $|f(x) - f(y)| \geq k|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{R}_+^*$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) = \lambda x$ με $|\lambda| < k^2$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x^2 + 2) + f(3x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο , τουλάχιστον σημεία.

(Απ. $f(3) = 0, f(6) = 0$)

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x^2) + f(2x) = x^4 - 8x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες.

(Απ. $f(0) = 0, f(2) = 0$)

6. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(f(x)) = 2x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(2x - 1) = 2f(x) - 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα.

(Απ. $f(1) = 1$)

7. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(f(x)) = 3x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(3x - 2) = 3f(x) - 2, x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = 1$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο.

(Απ. $f(1) = 1$)

8. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) = 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$

α) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(\lambda^2 + \lambda - 1)) < 1.$

9. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) + x = 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$

α) να δείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

β) Να υπολογίσετε την f^{-1} .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = f(1 - x).$

(Απ. γ) $x = 0$)

10. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = x^3$ είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε την f^{-1} .
11. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{2v+1} + x^{2v+3}$, όπου $v \in \mathbb{N}$.
- Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.
 - Να ελέγξετε αν η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $x^{2v+1} + x^{2v+3} = 2$.
12. Έστω $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ισχύει $xg(x) = f(x)$, για κάθε $x > 0$. Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, να δείξετε ότι :
- $$f(x+y) < f(x) + f(y), \text{ με } x, y \in (0, +\infty).$$
13. Έστω $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(2, -3)$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$.
- Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
 - Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να λύσετε την ανίσωση $2\ln x < 2 + g(x^2)$
(Απ. γ) $x \in (0, 1)$
14. α) Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, όπου η συνάρτηση $g \circ f$ είναι $1-1$. Να δείξετε ότι και η συνάρτηση f είναι $1-1$.
- β) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = -e^x + f^3(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(g(x) + x^2 - x) = f(g(x) + 2x - 2)$.
(Απ. β) ii) $x = 1$ ή $x = 2$
15. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{-x} - x - 1$.
- Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x + 1$.
 - Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $e^{-\lambda} - e^{-\mu} = \lambda - \mu$, να δείξετε ότι $\lambda = \mu$.
 - Να λύσετε την εξίσωση $e^{-2x+1} - e^{-x} = x - 1$.
(Απ. β) $x = 0$, δ) $x = 1$

16. Έστω η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f .
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(f(x)) = x$, για κάθε $x \geq 1$.
- δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

$$(\text{Απ. } \alpha) [2, +\infty), \beta) f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}, x \geq 2)$$

17. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να εξετάσετε αν η C_f τέμνει του άξονες $x'x$ και $y'y$.
- β) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.
- γ) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να την βρείτε.
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(\frac{1}{1-e} + 2 - f(\ln x)\right) = -1$.

(Απ. α) $D_f = \mathbb{R}^*$, δεν τέμνει τους άξονες

$$\beta) f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{x-1}, x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \delta) x = 2)$$

18. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x) - f(1-x) = 0$.
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι

$$f^{-1}(x) = f(x) - 2, x \in \mathbb{R}$$

- δ) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) < f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι, αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε

$$x < f(x) < x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(Απ. α) $\mathbb{R}$, β) $x = 1$)