

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

1
NoΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

1. Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $f(x) = (x^2 - x - 2)^{2x-3}$
Ποιο θα ήταν το πεδίο ορισμού της f , αν αυτή ήταν εκθετική συνάρτηση ;
2. Να προσδιορισθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-2}$

β) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

γ) $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$

δ) $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

ε) $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\phi^2 x}}$

στ) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + |x|}$

ζ) $f(x) = \sqrt{\log(1-x)}$

η) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

θ) $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 4)$

ι) $f(x) = \sqrt{\eta \mu x - 1}$

ια) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}$

ιβ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}}$

ιγ) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

ιδ) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2 - |x|}$

ιε) $f(x) = \sqrt{8 - |x+1|}^3$

ιστ) $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x + 2}\right)$

ιζ) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - x}}$

ιη) $f(x) = \frac{2x+3}{x\sqrt{x} - 3x + 2\sqrt{x}}$

ιθ) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}$

κ) $f(x) = \frac{2}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

κα) $f(x) = \sqrt{(e^x - 1)\ln(x-1)}$

κβ) $f(x) = \frac{\eta \mu x}{9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27}$

κγ) $f(x) = \frac{x+2}{2\sin^2 x + 5\sin x + 3}$

3. Να ορισθεί ο μ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 + 2\mu x + 4)}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + 1}{x^2 + x + 1}$. Να ορισθεί ο πραγματικός αριθμός α , ώστε $f(A) \subseteq [-2, 2]$.
5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + \lambda x}{x^2 - 2x - 3}$. Να προσδιορισθεί ο λ , ώστε το σύνολο τιμών της f να είναι της μορφής $(-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(Απ. $\lambda \in (-3, 1)$)

6. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{αν } x \in (-\infty, -2) \\ 7 & \text{αν } x \in [-2, 3) \\ 2x + 1 & \text{αν } x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

α) Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογισθεί το σύνολο τιμών της.

8. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης :

$$h(x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

9. Αν για την συνάρτηση f ισχύει : $xf(x) + f(1-x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να βρείτε τον τύπο της f και το πεδίο τιμών της.

10. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει :

$$f(x) + 2f(-x) = \frac{3\alpha x}{1 + x^2}, \quad \alpha \neq 0.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε το πεδίο τιμών της f να είναι το διάστημα $[-4, 4]$.

11. Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των C_f με τους άξονες x' , y' .

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$$

$$\beta) f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$$

12. Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία, αν αυτά υπάρχουν, των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{6}{x}$$

$$\beta) f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 + x + 2$$

13. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

$$f(x) = ax^2 - x + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2ax - 1, \quad a \in \mathbb{R}.$$

14. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$\psi = (a+1)x^2 - 3ax + 2a - 1$ όταν ο a διατρέχει το $\mathbb{R} - \{-1\}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει ότι $f(x) = g(x) + x^2 - \kappa$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τον κ , ώστε οι C_f, C_g να τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$.

β) Αν $\kappa = 1$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω απ' τη C_g .

16. Να γίνουν πολλαπλού τύπου οι συναρτήσεις :

$$\alpha) f(x) = |x^2 - 9|$$

$$\beta) f(x) = |x - 1| + |x - 2|$$

Κατόπιν να κάνετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

17. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$g(x + \psi) + g(x - \psi) = 2g(x)g(\psi) \quad \forall x, \psi \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να δειχθεί ότι $g(0) = 0$ ή $g(0) = 1$.

β) Να βρεθούν οι σταθερές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (1).

18. Αν για κάθε $x \neq 0$ ισχύει : $xf(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

19. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\alpha f(x) + \beta f(1-x) = x, \text{ όπου } \alpha + \beta \neq 0,$$

τότε να αποδειχθεί ότι :

$$\alpha) f(x) + f(1-x) = \frac{1}{\alpha + \beta}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \text{ Αν } \alpha \neq \beta \text{ τότε } f(x) = \frac{x}{\alpha - \beta} - \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

20. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$.
Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$.

$$\alpha) f(x) = \sqrt{(x-1)^2} \quad \text{και} \quad g(x) = (\sqrt{x-1})^2$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2|x|} \quad \text{και} \quad g(x) = 1 - \frac{2}{|x|}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} + 2$$

$$\delta) f(x) = \ln(x^2 + x) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x + \ln(x+1)$$

21. Δίνονται οι συναρτήσεις f με τύπο $f(x) = \frac{2\kappa x + 1 - \kappa}{x + \kappa + 2}$ και g με τύπο

$$g(x) = \frac{(\kappa^2 - 3)x + 2\kappa - 8}{x + 2\kappa - 1}. \text{ Να προσδιορισθεί ο } \kappa \in \mathbb{R}, \text{ ώστε να είναι } f = g.$$

22. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$, και για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$2(f+g)(x) [(f+g)(x) - 2x] \leq [(f+g)(x)]^2 - [(f-g)(x)]^2 - 4x^2$$

Να αποδειχθεί ότι : $f = g$.

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

23. Αν $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ και $g(x) = \sqrt{1 + x}$ να βρείτε (αν υπάρχουν) τις συναρτήσεις $f \circ g$, $f \circ f$.

24. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$, αν :

α) $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = \sqrt{x}$

β) $f(x) = 2x$ και $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

γ) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ και $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$

δ) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ και $g(x) = \ln(x-1)$

25. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & , x \in [0, 1) \\ 4x - 2 & , x \in [1, 3) \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x \in [-2, 4) \\ \sqrt{x} & , x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

Να ορισθεί η συνάρτηση $f \circ g$.

26. Αν $f(x) = \begin{cases} 2x & , -2 < x < 1 \\ 1+x & , 1 \leq x < 3 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , x \leq 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}$, τότε να βρείτε την συνάρτηση $f \circ g$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{-\alpha x}{3 - x}$. Να προσδιορισθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε $(f \circ f)(x) = x$.

28. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 6]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της h με $h(x) = f(x^2 - 2)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, 1]$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

α) $f(x^2)$

β) $f(x - 3)$

γ) $f(\ln x)$

δ) $f(x^2 - 2x + 1)$

30. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $A = [-4, 2]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(5 - x^2)$.
31. Να βρείτε τον τύπο $f(x)$ συνάρτησης f τέτοια ώστε να ισχύει :
- α) $(f \circ g)(x) = x^2 + 24x + 3$, αν $g(x) = x + 1$
- β) $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 5$, αν $g(x) = x - 1$
- γ) $(g \circ f)(x) = |\sin x|$, αν $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- δ) $f(\sqrt{x}) = 2x + \sqrt{x} + 1$, με $x \geq 0$.
32. Να βρεθεί η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αν $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x - 1$ και $g(x) = x - 2$.
33. Αν $f(x) = 2x - 1$ και $(g \circ f)(x) = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε το $g(x)$.
34. Δίνονται οι συναρτήσεις f και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x - 1$ και $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 3$. Βρείτε τον τύπο της g .
35. Αν $f(x) = 2x - 3$ και $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 10\sin x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της g .
36. Αν $f(x + 1) = x^2 - x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .
37. Αν $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $f(1)$.
38. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $f(f(x)) = 3x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να δείξετε ότι $f(3x + 4) = 3f(x) + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
- β) Να υπολογίσετε το $f(-2)$.
39. Δίνονται οι συναρτήσεις f και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (f \circ f)(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει μοναδικό $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $g(\alpha) = \alpha$, να δείξετε ότι $f(\alpha) = \alpha$.
40. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $f(x - 3) - 2f(1 - x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τη συνάρτηση f .
- (Υπόδειξη : θέτουμε $y = x - 3$, άρα $x = y + 3 \dots$)

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ “1 - 1”
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

41. Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι “1 - 1” ;

α) $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

β) $f(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

γ) $f(x) = x^4 + \sin x$

δ) $f(x) = x|x|$

42. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε πραγματικό x ισχύει :

$$(g \circ g)(x) = \alpha g(x) + \beta f(x^3),$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Αν η f είναι συνάρτηση “1 - 1”, να αποδείξετε ότι η g είναι “1 - 1”.

43. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) + e^{f(x)} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x_0 = \rho$, να δείξετε ότι $\rho = 1$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x) < x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ αν : $f(2\lambda^2 - 1) + e^{f(\lambda)} = \lambda$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

α) Ναδειχθεί ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη συνάρτηση της g .

45. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

β) Να δείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι περιττή.

46. Να εξεταστεί αν αντιστρέφεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta \mu x$ και με σύνολο τιμών το διάστημα $B = [-1, 1]$.

47. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x - 2}}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη συνάρτηση της f , καθώς και το σύνολο τιμών της.
48. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$f^5(x) + x^5 - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- α) Να βρείτε τα σημεία όπου η C_f τέμνει τον $x'x$ άξονα.
- β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- γ) Να δείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
49. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(f(x)) = x + f(x)$, τότε να αποδείξετε ότι :
- α) Η f είναι αντιστρέψιμη. β) $f(0) = 0$. γ) $f(x) = x + f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
50. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$f(2 - x) + f(x + 4) = x^2 - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Αν επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα :
- α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 2) > 0$. (Απ. α) $x = 3$)
51. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$, $x \in [2, +\infty)$ είναι αντιστρέψιμη και κατόπιν να βρείτε την συνάρτηση $f^{-1}(x)$.
52. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$ είναι αντιστρέψιμη και έπειτα να βρείτε την $f^{-1}(x)$.
53. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$ είναι “1 - 1” και κατόπιν να βρείτε την $f^{-1}(x)$.
54. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο :
- $$f(x) = \begin{cases} (x - 2) + \beta, & x \in [2, +\infty) \\ \lambda(x - 2) + \beta, & x \in (-\infty, 2) \end{cases}$$
- Να προσδιορισθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει η αντίστροφη της συνάρτησης και να βρεθεί.
- (Απ. $\lambda > 0$)

55. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha + x, & x \leq 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$. Προσδιορίστε το α ώστε η f να

είναι “1 - 1” και μετά να βρείτε την f^{-1} .

56. α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \alpha x + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0).$$

Να προσδιορισθούν οι α, β , ώστε να υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και ακόμα να είναι $f^{-1} = f$.

- β) Για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ ισχύει :

$$f(x) + f(1 - x) + f^{-1}(1 + x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να βρεθούν τα α, β .

57. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$, με $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

- α) Ναδειχθεί ότι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και να βρεθεί.

- β) Να βρεθούν τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει : $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow [0, +\infty)$, με $f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$.

- α) Ναδειχθεί ότι $A = [0, 1)$.

- β) Ναδειχθεί ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και να βρεθεί.

59. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση : $f^3(x) + 3f(x) + x - 2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

- β) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

- γ) Να βρείτε την f^{-1} .

60. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση : $f^3(x) + f(x) + x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

- β) Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

- γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(f(x) + 1) < 0$.

61. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(5, 2)$ και $B(6, 7)$.
- α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(1 + f^{-1}(x^2 - x)) = 7$.
62. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(5, -2)$.
- α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(f(e^x)) < -2$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(x) - 7) = 5$.
63. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με : $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x, y \neq 0$, έχει για την εξίσωση $f(x) = 0$ μοναδική λύση.
- α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- β) Να δείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.
- γ) Να δείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, για κάθε $x \neq 0$.
- δ) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$.
64. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $(f \circ f)(x) = e^{-x} - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση : $e^{-x} - x = 1$.
- δ) Να δείξετε ότι : $f(0) = 0$.
65. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{2e^x}{1 + f^2(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να δείξετε ότι η $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση : $\ln(f(x)) > 0$.
- ε) Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι : $f(\alpha + \beta) > \frac{\beta f(\alpha) + \alpha f(\beta)}{\alpha + \beta}$.