

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣΑΝΑΛΥΣΗ
1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

2
NoΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
όταν $x \rightarrow x_0$

1. Να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

2. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sigma \upsilon \nu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1) \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{x-1} \right] = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x^2 - 4) \eta \mu \frac{1}{x-2} \right] = 0$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 3} \left[(x-3) \eta \mu \frac{1}{x-3} + x \right] = 3$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{-2x^2 + x + 3}{-2x^2 + 5x - 3}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x - 34}{1 - \sqrt[3]{x-1}}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x-1}$$

4. Έστω η συνάρτηση
- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$
- .

Να αποδειχθεί ότι η f δεν έχει όριο στο σημείο $x_0 = 3$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & , x > 1 \\ \frac{x^\mu-1}{x-1} & , x < 1 \end{cases}$.

Αν $\mu \in \mathbb{N}^*$, τότε να αποδείξετε ότι η f δεν έχει όριο στο σημείο $x_0 = 1$.

6. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\mu}{1-x^\mu} - \frac{\nu}{1-x^\nu} \right)$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$

β) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\alpha}}{x - \alpha}$

7. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2 - x| + |x - 4| - 3x}{\sqrt{x - 4}}$.

8. Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 5x + 6| + x^2 - 2x}{|x + 3| - 5}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}$

9. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 3}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x|x|}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 5}{(x+1)(\sqrt{x^2 + 3} - 2)}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|\eta\mu 2x}$

10. Να αποδείξετε ότι :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\eta\mu x \sin \left(\eta\mu \frac{1}{x} \right) \right] = 0$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(x + \eta\mu \frac{\pi}{x} \right) (\sqrt{1+x^2} - 1) \right] = 0$

11. Να αποδείξετε ότι :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^\kappa \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^\kappa \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) = 0$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$

12. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \neq 0$ ισχύει :

$$\left| xf(x) - \eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq x^2$$

Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

13. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες :

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ και
- $f(x)\eta\mu x \geq x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Να προσδιορίσετε το α .

14. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\epsilon\phi 3x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 6x}{x\eta\mu x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$

15. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu x}{\pi - x}$

β) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [(\pi - 2x)\epsilon\phi x]$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \eta\mu x} - \sqrt{4 - \eta\mu x}}{x}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{x^2}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}}{x}$

στ) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\epsilon\phi \pi x}{x + 4}$

16. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \epsilon\phi x}{2x - \eta\mu x}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2 \eta\mu^2 x}$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu\pi x}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2}}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x - \eta\mu x}{x^3}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x} + \eta\mu 2x}{\epsilon\phi x + x}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\eta\mu(\pi\eta\mu\pi x)}$$

17. Οι συναρτήσεις f, g , είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\eta\mu x - xf(x)}{2x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\eta\mu x + xf(x)}{\eta\mu x} = \frac{1}{2}$$

Να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

18. Οι συναρτήσεις f, g , είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις συνθήκες :

- $\lim_{x \rightarrow \alpha} [5f(x) + 2g(x)] = 2$ και
- $\lim_{x \rightarrow \alpha} [7f(x) + 3g(x)] = 1$.

Να βρείτε τα : $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$.

19. Αν $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x + \alpha}{x^2} + \beta$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$, τότε να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β , όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

20. Αν $f(x) = \frac{\lambda \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x + \mu}{2x}$, τότε να βρείτε το όριο της f στο σημείο $x_0 = 0$ όταν τα λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

21. Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + (\alpha + 2)x - 16}{x^2 - 4}$ στο σημείο $x_0 = 2$ όταν το α παίρνει πραγματικές τιμές.

22. Να προσδιορισθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2v} - 2x^v - \alpha}{(x-1)^2}$ να είναι πραγματικός αριθμός, με $v \in \mathbb{N}^*$.

23. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha x^2 + x + 2}{x-1} + \beta x \right) = 4$, τότε να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

24. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^3 + (\beta + 1)x + \gamma + 2}{(x - 2)^2} = 6$ να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ .
25. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - \alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + 2}{(x - 2)^2} = 4$, τότε να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ .
26. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^\nu + \beta x^\mu + \gamma}{x - 1}$, όπου ν, μ φυσικοί.
27. Αν $f(x) = \frac{2\alpha x^2 + 3\beta x - 5}{x - 2}$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \beta^2 + 5$ υπολογίστε τους πραγματικούς αριθμούς α, β .
28. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha^2 - \sqrt{\alpha^2 - x^2}}{x}$, $\alpha \neq 0$. να βρείτε το όριο της f στο σημείο $x_0 = 0$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - \alpha x + \alpha^2} - \alpha}{|x| - \alpha}$. Να βρείτε το όριο της f στο σημείο $x_0 = \alpha$ όταν $\alpha \in \mathbb{R}$.
30. Αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4\alpha^2} - 2\alpha}{\sqrt{\beta^2 - x^2} - \beta}$, να βρείτε το όριο της f στο σημείο $x_0 = 0$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
31. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + \alpha x + \beta}{x - 2}, & x < 2 \\ x^2 - (\alpha + \gamma)x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$ και η f στο σημείο $x_0 = 2$ έχει όριο πραγματικό αριθμό L να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
32. Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \in [1, +\infty) \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - (\alpha + \beta + 1)}{x - 1}, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$
Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το όριο της f , όταν $x \rightarrow 1$.
33. Έτω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - \alpha}{x-2}, & x > 2 \\ \frac{\beta x^2 + x - 1}{\eta \mu(x-2)}, & 0 < x < 2 \end{cases}$.
Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να έχει όριο στο σημείο $x_0 = 2$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
όταν $x \rightarrow \pm \infty$

34. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} + x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 3} + x)$$

35. Να υπολογίσετε το επόμενο όριο :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} - \sqrt{x^2 + 2\alpha^2}}{\eta\mu \frac{1}{x}}, \text{ όπου } \alpha \neq 0.$$

36. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta\mu^v \frac{\pi}{x} \right), v \in \mathbb{N}^*.$

37. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x).$

38. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο της f στο $-\infty$ με

$$f(x) = \frac{(\mu^2 - 1)x^2 + (\mu - 1)x + 3}{\mu x + 2}$$

39. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο της f στο $-\infty$ με

$$f(x) = (\alpha x - 2) \left(\alpha + 2 + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} \right)$$

40. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο της f στο $-\infty$ με

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 2} - \alpha x$$

41. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο της f στο $-\infty$ με

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + \alpha x$$

42. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{9x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta.$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να έχει στο $-\infty$ όριο το 2.

43. Αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \alpha x}{\sqrt{4x^2 + x + 2} - \beta x}$, τότε να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
ώστε η f να έχει στο $+\infty$ όριο $L \in \mathbb{R}.$

44. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \neq 0$ να βρεθεί το όριο της f στο $+\infty$ με

$$f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + 8x + 4} - \sqrt{x^2 + x + 1}$$

45. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [2f(x) + g(x)] = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)g(x)] = 0$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

46. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \sin \frac{1}{x} + \sqrt{1+x^2} \cdot g(x) \right] = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x) + x \cdot g(x)] = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

47. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{\frac{x+\eta\mu x}{x-\sigma\upsilon\nu x}}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x^4}{2-|x|}}$$

48. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\ln^2 x - 4\ln x + 5}{\ln^2 x + \ln x + 7}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(e^x + 2)]$$

Όριο
συνάρτησης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

49. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ , ($\kappa \in \mathbb{R}$), ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\kappa^2 + 2)x^2 - 2\kappa^2 x - 3\kappa^2 - 10x + 12}{x - 3} = 2\kappa^2 - 5\kappa + 5$$

(Απ. $\kappa = -3$ ή $\kappa = \frac{1}{2}$)

50. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2} + a^x}{e^x + a^{x+2}}$, για τις διάφορες τιμές του $a > 0$.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\eta\mu^2 x - 2x(f(x) + x) \leq f^2(x) \leq 2(\eta\mu^2 x - x f(x)),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

52. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει :

$$x^2 |g(x)| + x^4 f^4(x) \leq |\eta\mu x|, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

53. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^3(x) + \lambda f(x)) = \lambda + 1, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 1. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1.$$

54. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = 6$, να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) - 3x^2 - 6}{2x^2 f(x) - 6x^3 + 4x - 5}$$

(Απ. 0)

55. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+2)}{f(x)} = 3$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+5)}{f(x-1)}$.

$$(\text{Υπ. Είναι } \frac{f(x+5)}{f(x-1)} = \frac{f(x+5)}{f(x+3)} \cdot \frac{f(x+3)}{f(x+1)} \cdot \frac{f(x+1)}{f(x-1)}, \dots \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+5)}{f(x-1)} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27)$$

56. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} [f^2(x) + g^2(x) - 4f(x) - 6g(x)] = -13$, να υπολογίσετε τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
(Απ. 2 και 3 αντίστοιχα)

57. Αν για τις συναρτήσεις g, h ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$, με $x_0 > 0$,

$$g(x) > 0 \text{ και } h(x) > 0, \text{ να αποδείξετε ότι : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^2(x) + h^2(x)}{g(x) + h(x)} = 0.$$

58. Αν $f(x) = x^3 - 3x + 2$ και $h(x) = |x - k| f(x)$, να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{x \rightarrow k} \frac{h(x) - h(k)}{x - k}$.

(Απ. $k = 1$ ή $k = -2$)

59. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 3} (|x - 3| g(x)) = 2$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$,

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g^3(x) - 2g^2(x) + 4}{g^3(x) - 2012}$.

(Απ. α) $+\infty$, β) 1)

60. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι ορισμένη στο $(-2, 2)$, ώστε να ισχύει :

$$x^4 g(x) \geq 4x^2 + 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in (-2, 0) \cup (0, 2). \text{ Να υπολογίσετε τα όρια :}$$

α) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{4g^2(x) + 2g(x) + 1} - 2g(x) \right)$

(Απ. α) $+\infty$, β) $\frac{1}{2}$)