

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

3
No

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο με τετμημένη x_0 τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x + x^2}{x}, & x < 0 \\ x^2 - x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

με $x_0 = 0$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

με $x_0 = 0$

(Απ. είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$ και οι δύο συναρτήσεις)

2. Δίνεται η συνάρτηση f με :

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in [0, 1] \\ x^2 + 3, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f .

3. Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε να είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη x_0 , η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2\alpha}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha - \frac{1}{6}, & x = 1 \end{cases}, \quad \text{με } x_0 = 1$$

(Απ. $\alpha = 1$)

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με :

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f \circ g$ ως προς τη συνέχεια.

(Απ. η $f \circ g$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$)

5. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη συνθήκη :

$$x^2 + \eta\mu x \leq f(x) \leq 2|x| \quad \text{με} \quad x \in (-1, 1)$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

6. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις συνθήκες :

- είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$
- για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f(x) \eta\mu x \geq \left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) \operatorname{syn} \frac{1}{x}$$

Να βρεθεί η τιμή της f στο σημείο $x_0 = 0$.

(Απ. $f(0) = 0$)

7. α) Δίνεται η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει :

$$|\eta\mu x| \leq f(x) \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .

β) Να εξετάσετε το ίδιο πρόβλημα, αν $e^x - 1 \leq f(x) \leq x$, $x \in \mathbb{R}$

8. Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε να είναι συνεχής στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 4$ η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x - 4}{x - 3\sqrt{x} + 2}, & x > 4 \\ \alpha x^2 + (\alpha^2 + 1)x - 20, & x \leq 4 \end{cases}$$

(Απ. $\alpha = 1$)

9. Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + (\beta - 1)x + 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής.}$$

(Απ. $\alpha = 3, \beta = -10$)

10. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 1}{(x - 1)^2}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$

Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε η f να είναι συνεχής.

(Απ. $\alpha = 2, \beta = -5$ και $\gamma = 4$)

11. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f με $f(x) = \min \left\{ x^2, \frac{1}{x} \right\}$, με $x \in \mathbb{R}^*$ και κατόπιν να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Σημείωση! Η συνάρτηση $f(x) = \min \{A(x), B(x)\}$, για κάθε τιμή του x που ορίζονται οι παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$ έχει τιμή τη μικρότερη από τις τιμές των $A(x), B(x)$.

(Απ. η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της)

12. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + f(x)}{x - 2} = L$ με $L \in \mathbb{R}$ και
- $f(2) = -4$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|4 - x^2|}{x^2 - 4} \right).$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f στο πεδίο ορισμού της.

(Απ. α) η f έχει πεδίο ορισμού $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq \pm 2$
β) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της)

14. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει $f(0) = f(1)$. Να μελετήσετε τη συνέχεια της συνάρτησης g με

$$g(x) = \begin{cases} f(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

(Απ. η g είναι συνεχής)

15. Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(1)$. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση g με τύπο :

$$g(x) = \begin{cases} f(\sin x), & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ f(\eta\mu x), & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(Απ. η g είναι συνεχής)

16. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x < \alpha \\ x^3 + x, & x \geq \alpha \end{cases}$.

Να προσδιορίσετε την τιμή του α , με $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = \alpha$.

(Απ. αν $\alpha \neq 0$ η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = \alpha$, ενώ αν $\alpha = 0$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = \alpha = 0$)

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1] \\ \alpha \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, \pi] \end{cases}$.

Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $[0, \pi]$.

(Απ. $\alpha = -3e^3$)

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x - 2, & x < 1 \\ \beta(2x-1)^2 + 3\alpha, & x \geq 1 \end{cases}$.

Αν η f είναι συνεχής και το σημείο $A(\alpha, \alpha - \beta)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : y = 3x$, να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Απ. $\alpha = -1, \beta = 2$)

19. α) Είναι δυνατόν δύο συναρτήσεις f και g που είναι ορισμένες στο σημείο x_0 και σε μια περιοχή του x_0 και δεν είναι συνεχείς στο x_0 , να έχουν άθροισμα και γινόμενο συνεχείς συναρτήσεις στο x_0 ;

β) Είναι δυνατόν δύο συναρτήσεις f και g , με f συνεχή στο x_0 , $f(x_0) \neq 0$ και g ορισμένη στο σημείο x_0 και σε κάποια περιοχή του x_0 αλλά όχι συνεχή στο σημείο x_0 , να έχουν άθροισμα και γινόμενο συναρτήσεις ασυνεχείς στο x_0 ;

(Απ. α) είναι δυνατόν β) είναι δυνατόν)

20. Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(f(x))^2 + (g(x))^2 = \eta\mu^2 x$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = \pi$.

21. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$f(\alpha\beta) = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha).$$

Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$.

22. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι :

$$f(x + \psi) = f(x) + f(\psi) + \lambda x\psi, \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι συνεχής στο 0 , να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι : $3 \in (\alpha, \beta)$.

α) Αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει :

$$[f(x) - 3]^2 \leq (x^2 - 9) \sin \frac{1}{x} + |x - 3| \quad (1)$$

να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 3$.

β) Αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ με $x \neq 3$ ισχύει η σχέση (1) και η f είναι συνεχής στο 3 , να βρείτε το $f(3)$.

γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συνεχής η

$$\text{συνάρτηση } g \text{ με } g(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{f^2(3) + x} - \lim_{x \rightarrow 3} f(x)}, & x > 0 \\ \alpha^2 - \frac{\eta\mu 7x}{x}, & x \leq 0 \end{cases}.$$

24. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $(x-1)f(x) + 2 = \sqrt{x^2 + 3}$.
25. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και για την οποία επίσης ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)}{x-1} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$.
(Υπ. θέτουμε $x+1 = u, \dots$ Απ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lambda$)
26. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και για την οποία επίσης ισχύει $f(4-x) = f(x), x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x-1} = 5$.
α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$,
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.
(Απ. α) 4, β) Υπ. θέτουμε $x = 4 - h$ στην $f(x) \dots$)
27. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία επίσης ισχύει $f(x+3) + f(x) = x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.
(Υπ. θέτουμε $x - 3 = h \dots$)
28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
 $f^2(x) + g^2(x) \leq 2f(x) \cdot g(x) - x^2 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι $f(0) = g(0)$.
β) Αν η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να δείξετε ότι και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
29. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = x + e^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
30. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:
 - $f(xy) = f(x) + f(y) + (x^2 - x)(y^2 - y)$, για κάθε $x, y > 0$
 - f συνεχής στο $x_0 = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$.
 Να αποδείξετε ότι:
 α) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
 β) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{4}{x_0} + x_0 - 1, x_0 > 0$