

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

4
No

ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO
ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ – ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = 2 - 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στα διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Αν $f(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta) + 3(x - \beta)(x - \gamma) + 5(x - \alpha)(x - \gamma)$ και $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(x + 1) \cdot 3^{x+1} - 1 = 0$ έχει μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.
(Πανεπιστήμιο Αθηνών, τμηματικές εξετάσεις)
4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + ax = 0$, με $0 < a < e$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.
5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6 - 6 = 4x$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε : $f(x_0) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.
7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, με $f(0) = \alpha$ και $f(1) = \beta$, όπου $\alpha, \beta \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, δηλ. με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το ίδιο κλειστό διάστημα. Έστω επίσης η f να είναι συνεχής στο $[0, 1]$, να δείξετε τότε ότι υπάρχει ένα x_0 που να ανήκει στο $[0, 1]$, τέτοιο ώστε : $f(x_0) - x_0 = 0$

(Πανεπιστήμιο Paris I)

9. Αν $p, q \in \mathbb{R}$ με $p > 0$ και $q > 0$ και η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε :

$$f(x_0) = \frac{p \cdot f(\alpha) + q \cdot f(\beta)}{p + q}$$

Να διαπιστώσετε ότι για $p = q = 1$ αποδεικνύεται η άσκηση 6 / σελ. 1

10. Θεωρούμε την εξίσωση $\frac{x^6 + 1}{x - \alpha} + \frac{x^{12} + 1}{x - \beta} = 0$, όπου $\alpha < \beta$ και $x \neq \alpha$, $x \neq \beta$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον ρίζα πραγματική στο διάστημα (α, β) .

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + (\alpha^2 - 2)x^2 + (\alpha - 1)x - \alpha^2 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.

12. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $-1 < f(x) \leq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $c \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$(f(c))^2 + f(c) + c = 0$$

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5 + x^2 + x + 1 = 0$ έχει πραγματική ρίζα.

14. Οι συναρτήσεις f, g :

- είναι συνεχείς στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$
- $f(\Delta) = g(\Delta) = [\alpha, \beta]$ δηλ. τα σύνολα τιμών τους είναι ίσα με το Δ

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(g(\xi)) = \xi$.

15. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x - \beta)(x^{2k} + 1) + (x - \alpha)(x^{2\lambda} + 1) = 0$ με $\alpha < \beta$ και $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$, έχει μια ρίζα στο διάστημα (α, β) .

(Αμερικάνικο Κολλέγιο Κωνσταντινούπολης)

16. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi - \alpha} + \frac{1}{\xi - \beta}$$

17. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν ότι $\alpha\beta > 0$ και $f([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $\gamma \cdot f(\gamma) = \alpha\beta$.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3}{16} - \eta\mu(\pi x) + 7$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f παίρνει τη τιμή $\frac{7}{2}$ στο διάστημα $[-4, 4]$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\psi = f(x)$ που είναι συνεχής. Αν $f(0) = f(2\pi)$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$, ώστε $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$. Δίνεται ότι $f(0) \neq f(\pi)$.
20. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow (0, 2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) = 2f(\xi) - 3\xi$.
21. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\beta^2 < 3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
22. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
- $$f(x) + f(x+1) = 0.$$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \alpha+1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi) = f(\xi+1)$.
23. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει :
- $f(\alpha) = \alpha - 1$
 - $f(\alpha+1) = \alpha$
 - $\alpha < g(x) < \alpha+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 1$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο ώστε :
- $$f(x_0) \cdot g(x_0) = x_0^2 - x_0$$
24. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει :
- $$f(\alpha) = \alpha, \quad g(\beta) = \beta \quad \text{και} \quad f(x) > g(x), \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :
- $$\rho \cdot f(x_0) + (1 - \rho) \cdot g(x_0) = x_0 \quad \text{με } 0 < \rho < 1.$$
25. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει :
- $$f^2(x) - g^2(x) = -5x \quad \text{και} \quad f(x) > g(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + g(x) = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε οποιοδήποτε διάστημα (α, β) , με $\alpha < 0$ και $\beta > 0$.
26. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $\psi = f(x)$. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε να δείξετε ότι το πρόσημο της $f(x)$ είναι σταθερό για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

27. Έστω η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ώστε : $x^2 - x + [f(x)]^3 = 6$.
Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-1, 1)$.

28. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g, h : [2010, 2014] \rightarrow [2010, 2014]$, με f να είναι γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα στο $[2010, 2014]$.
Επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις :

- $f([2010, 2014]) = g([2010, 2014]) = [2010, 2014]$
- $h(2010) = 2014$
- $h(2014) = 2010$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (2010, 2014)$ τέτοιος ώστε

$$f(g(h(\xi))) = g(f(\xi)).$$

29. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g, h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, με $\beta > 4\alpha$. Έστω ότι για τα σύνολα τιμών των f, g, h ισχύει :

$$f([\alpha, \beta]) \subseteq \left[\frac{\alpha}{8}, \frac{\beta}{4}\right], \quad g([\alpha, \beta]) \subseteq \left[\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{8}\right], \quad h([\alpha, \beta]) \subseteq \left[\frac{3\alpha}{8}, \frac{5\beta}{8}\right]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος ώστε $f(\xi) + g(\xi) + h(\xi) = \xi$.

30. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $\Delta = [0, 5]$ και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 5]$. Αν $f(0) = 1$, $f(2) = -2$, $f(4) = 3$ και $f(5) = -4$, να βρεθούν :

- α) η μονοτονία της f ,
- β) το σύνολο τιμών της f ,
- γ) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα Δ .

(Απ. β) $[-4, 3]$ γ) 3 ακριβώς)

31. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $[1, 4]$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f^2(1) + f^2(4) = 2f(4) - 6f(1) - 10$.
Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

(Απ. $[-3, 1]$)

32. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x) = x^4 + 2x^2 - 4f(x) - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν :

- α) το $f(1)$
- β) ο τύπος της f .

(Απ. α) $f(1) = -4$, β) $f(x) = -x^2 - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

33. Έστω $f_1(x), f_2(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν :

- $(f_1 \circ f_2)(x) = (f_2 \circ f_1)(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Η εξίσωση $f_1(x) = f_2(x)$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $(f_1 \circ f_1)(x) = (f_2 \circ f_2)(x)$, είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta < \gamma$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

35. Έστω συνάρτηση $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

- $f(2) = 2$ και $f(3) = 3$
- $f^2(x) - 3f(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in (2, 3)$.

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

36. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{3}$.

37. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, 10]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in [2, 10]$ ώστε $f(x_0) = \frac{3f(3) + 5f(6) + 2f(8)}{10}$.

38. Η f συνάρτηση είναι συνεχής και θετική στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι :

α) Η f έχει ελάχιστο m και μέγιστο M στο $[\alpha, \beta]$.

β) $m^3 \leq f(\alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot f(\beta) \leq M^3$.

γ) Η εξίσωση $f^3(x) - f(\alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot f(\beta) = 0$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

39. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να ισχύει : $f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{\beta - \alpha}{3}\right)$.

40. Για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν

- είναι συνεχείς στο διάστημα $[α, β]$
- $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [α, β]$
- $f(α) = α$ και $g(β) = β$,

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [α, β]$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$f(\xi) \cdot \eta \mu^2 \xi + g(\xi) \cdot \sigma \nu \eta^2 \xi = \xi \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

41. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in [α, β]$, να ισχύει : $x \eta \mu x - \alpha \eta \mu \alpha \leq f(x) \leq x^3 - \beta x^2 + \beta(x - \beta)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[α, β]$.

42. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να ισχύει : $f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x$ και $f(1) = 0$.

Να αποδείξετε ότι :

α) Η f αντιστρέφεται.

β) Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f(5 - 10x^3) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

43. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(α) = β$ και $f(x) \cdot f(f(x)) = \gamma$, για κάθε $x \in [α, β]$, όπου $1 < \alpha < \gamma < \beta$. Να βρείτε τις τιμές $f(\beta)$, $f(\gamma)$.

$$(\text{Απ. } f(\beta) = \frac{\gamma}{\beta}, f(\gamma) = 1)$$

Εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης είναι η επόμενη :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [2, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(2) = 10$ και $f(x) \cdot f(f(x)) = 5$, για κάθε $x \in [2, 10]$. Να βρείτε τις τιμές $f(10)$, $f(5)$.

$$(\text{Απ. } f(10) = \frac{1}{2}, f(5) = 1)$$

44. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 + \lambda x + e$ και $g(x) = -x^4 + \lambda x + e$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $(\rho_1, 0)$ και της g από το $(\rho_2, 0)$, με $\rho_1 < \rho_2$, να δείξετε ότι το διάγραμμα της συνάρτησης $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, όπου α, β θετικοί αριθμοί, διέρχεται από ένα τουλάχιστον σημείο $(\rho, 0)$, με $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

45. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, για τις οποίες ισχύει:

- $g(x) = f(x) \cdot (\lambda - x)$, $\lambda > 0$
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \geq 0$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $A(x_1, g(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ με $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ και $x_1 + x_2 = \lambda$, για τα οποία ισχύει $AB \parallel x'x$.