

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ**ΑΝΑΛΥΣΗ**
1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΑσκήσεις Επανάληψης
**συναρτήσεις – όρια –
συνέχεια – βασικά θεωρήματα**
(Θ. Bolzano – Θ.Ε.Τ. – Θ.Μ.Ε.Τ.)

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

4β
No

1. Έστω
- f
- συνάρτηση συνεχής στο
- $[1, +\infty)$
- τέτοια ώστε :

$$f^2(x) + 1 = \ln x + 2f(x) \quad \text{και} \quad f(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \geq 1.$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.β) Να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .γ) Να υπολογίσετε το $\alpha \in [1, +\infty)$ αν $\ln \left[\frac{1+f^2(2\alpha)}{1+f^2(\alpha^2)} \right] = 0$.δ) Να υπολογίσετε τα όρια : **i)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, **ii)** $\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x)$.(Απ. β) $f^{-1}(x) = e^{(x-1)^2}$, γ) $\alpha = 2$, δ)i) 1, δ)ii) e)

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση
- f
- ορισμένη στο
- $[3, 6]$
- για την οποία ισχύουν :
-
- $f(x) \neq 0$
- , για κάθε
- $x \in [3, 6]$
- ,
- $f(3) > 0$
- και
- $f(3) \cdot f(4) = f(5) \cdot f(6)$
- .

α) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [3, 6]$.β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1 \in [3, 4]$ και $x_2 \in [5, 6]$ τέτοια ώστε :
 $(f(x_1))^2 = f(3) \cdot f(4)$ και $(f(x_2))^2 = f(5) \cdot f(6)$.γ) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται.(Απ. Β. γ) η f δεν αντιστρέφεται)

3. Δίνεται η συνάρτηση
- f
- η οποία ορίζεται και είναι συνεχής στο
- $[0, 2]$
- και ισχύει :

$$f(0) + 2f(1) + f(2) = 0.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x) + f(x+1)$ και αν δείξετε ότι είναι συνεχής σ' αυτό.β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g παίρνει τη τιμή 0.

4. Αν η συνάρτηση
- $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$
- είναι συνεχής και
- $1 - 1$
- , τότε να δείξετε ότι η
- f
- είναι γνησίως μονότονη στο
- $[\alpha, \beta]$
- .

(Υπ. έστω ότι η f **δεν** είναι γν. μονότονη στο $[\alpha, \beta]$, ... , $x_0 < x_1 < x_2$, ..., $h(x) = f(x) - f(x_0)$)

5. Για τη συνάρτηση $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x) = f(x) + \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\alpha - \beta} (x - \alpha)$,
όπου f είναι μια συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση με $f(\alpha) \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιος ώστε $g(\xi) = 0$.

β) Να δείξετε ότι ισχύει : $\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$.

γ) Να δείξετε ότι : $f(\alpha) \cdot g(\alpha) = g^2(\beta)$.

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f^3(x) + xf(x) + x^3 = 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να δείξετε ότι η $-x^2 < f(x) < 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6 - xf(x) = x^2 + 5x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2}$
(Απ. γ) 0, δ) 0, -1)

7. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x + \ln x + e^x) = f(x) + \ln f(x) + e^{f(x)}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$, **(1)** έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$.

β) Αν ρ είναι η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης **(1)**, τότε να δείξετε ότι $f(\rho) = \rho$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = x$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

- *8. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z και η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} |z + 4i| + \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}, & x < 1 \\ |z - 2 + 6i| + \frac{\eta \mu(x - 1)}{x^2 - 1}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{για την οποία υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β) Αν ο ζητούμενος γ.τ. είναι η ευθεία $\varepsilon : x - y - 6 = 0$, να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

- γ) Αν ισχύει ότι $|z| \geq 3\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε $\xi \cdot e^{\xi-2} = \xi \cdot |z| - 6$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[0, \theta]$, $\theta > 0$ με $f(0) = f(\theta)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x) - f\left(\frac{\theta}{2} - x\right)$.

- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left[0, \frac{\theta}{2}\right]$ τέτοιο ώστε :

$$f(\xi) = f\left(\frac{\theta}{2} + \xi\right).$$

$$(\text{Απ. α}) \left[0, \frac{\theta}{2}\right)$$

10. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^{2013}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{2013}} = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^{2013} = 0$, έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

11. Αν $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x - 1}{P(x)}$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο και $\alpha \neq 0$ και ακόμα :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ (1)}, \quad f(0) = 1 \text{ (2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ (3)}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \text{ (4)}, \quad \text{τότε :}$$

- α) Να δείξετε ότι το $P(x)$ είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο.

- β) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

$$(\text{Απ. } f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1)$$

12. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 1$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - x^2|}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι :

$$\alpha) \ell = 0, \quad \beta) f(1) = 1, \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2.$$

Οι ασκήσεις με * είναι εκτός ύλης.