

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

5
No

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να παραγωγιθούν οι συναρτήσεις με τύπους :

α) $f(x) = (\eta\mu x)^x$

β) $f(x) = |\eta\mu x|$

γ) $f(x) = \eta\mu |x|$

(Απ. α) $f'(x) = (\eta\mu x)^x [\ln(\eta\mu x) + \chi\sigma\phi x]$ β) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για $x \in (2k\pi, 2k\pi + \pi)$ και $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ για $x \in (2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$,

επίσης στα άκρα των διαστημάτων δεν ορίζονται οι παράγωγοι

γ) $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$ για $x \in (-\infty, 0)$ και $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για $x \in (0, +\infty)$, επίσης δεν ορίζεται η $f'(0)$.

2. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης :

$$f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu t}{e^x}$$

(Απ. $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu t}{e^x}$)

3. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμες στο $x_0 = 2$.
Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = (x^2 - 4)^2$, να αποδείξετε ότι
 $[f'(2)]^2 + [g'(2)]^2 = 16$.

4. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f με $f(x) = \log_{x^2} x^x$.

(Απ. $f'(x) = \frac{1}{2}$)

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = e^x(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει : $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$.γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{x}$.

6. α) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β) . Υποθέτουμε ότι $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση φ , ώστε :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\alpha, x_0) \\ g(x), & x \in [x_0, \beta) \end{cases}$$

i) Αν $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$, να δείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ii) Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε να δείξετε ότι

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{και} \quad f'(x_0) = g'(x_0)$$

β) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β , ώστε η συνάρτηση φ με :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x+1), & x \in (-3, 0) \\ 2e^{\beta x}, & x \in [0, 4) \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(Απ. $\alpha = 2, \beta = 1$)

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$, με $f'(3) = 0$ και η συνάρτηση g με $g(x) = \begin{cases} f(x+1), & x \leq 2 \\ f(2x-1), & x > 2 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ και ισχύει ότι $g'(2) = 0$.

8. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Αν η συνάρτηση h με $h(x) = \begin{cases} f^3(x) + 3f(x), & x \leq 0 \\ f^2(x) + 3, & x > 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, να υπολογίσετε τα $f(0)$ και $f'(0)$.

(Απ. $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$)

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2(\pi x)}{x-1}, & x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$.

α) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f .

β) Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής στο 1.

(Θέμα εξετάσεων)

$$(Απ. α) f'(x) = \frac{2(\eta\mu\pi x)(\sigmaυν\pi x)\pi(x-1) - \eta\mu^2\pi x}{(x-1)^2} \quad \text{για } x \neq 1 \quad \text{και } f'(1) = \pi^2$$

10. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3|x|}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

11. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^x \eta\mu 2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$(\text{Απ. } \alpha) f'(x) = \begin{cases} 2x \eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad \beta) f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} + x \eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{e^x} \left(2 \sigma\upsilon\nu 2x - \frac{\eta\mu 2x}{x^2} \right), & x < 0 \end{cases}$$

12. Αν η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\alpha \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = 0$$

και

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \eta\mu \frac{1}{x - \alpha}, & x \neq \alpha \\ 0, & x = \alpha \end{cases}$$

να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο α και ισχύει ότι $f'(\alpha) = 0$.

13. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x) = e^{\frac{f(x)}{g(x)}}$ και $F'(x_0) = 0$, να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

14. Για τη συνάρτηση g ισχύουν τα παρακάτω :

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- $g(x) \cdot g(y) \neq 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- $g(x + y) = \frac{g(x) + g(y)}{1 - g(x) \cdot g(y)}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = e$ και

$$f(x + \psi) = f(x) \cdot f(\psi) \quad \text{για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι :

α) $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) $f(0) = 1$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, τότε να θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

16. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$g(x) \leq f(x) \leq g(x) + (x - \alpha)^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Να δείξετε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη για $x = \alpha$, τότε και f θα είναι επίσης παραγωγίσιμη για $x = \alpha$ και θα είναι $f'(\alpha) = g'(\alpha)$.

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση g που είναι ορισμένη στο $[-1, 1]$, ενώ το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[1, 2]$. Ισχύει επίσης ότι

$$2x - x^2 \leq g(x) \leq x^2 \quad \text{για κάθε } x \in [-1, 1]$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση f , για την οποία είναι $f(x) = \frac{g^2(x)}{1 + g(x)}$

για $x \in [-1, 1]$.

α) Να δείξετε ότι $g(0) = 0$.

β) Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο 0.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.

δ) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$.

18. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

$$2x^3 + vx \leq f(x) \leq x^4 + 2x^2 + vx, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να υπολογίσετε την $f'(0)$. ($v \in \mathbb{R}$)

19. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων στο σημείο $x = 0$, όταν $f(0) = 0$:

$$\alpha) g(x) = f(x) \cdot \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \quad \text{και} \quad \beta) g(x) = \frac{f(x) + x}{[f(x)]^2 + 1}.$$

$$(\text{Απ. } \alpha) g'(0) = 0 \quad \beta) g'(0) = f'(0) + 1$$

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g που είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $[0, 2]$. Αν $2[f(x)]^2 - [g(x)]^3 + 9 = 0$, για κάθε $x \in [0, 2]$ και $f(1) = 3$, $f'(1) = -2$, να δείξετε ότι $g(1) = 3$ και $g'(1) = -\frac{8}{9}$.
21. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2f(x) - 6}{x - x_0}$. (Απ. 4)
22. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = -1$, $g'(0) = 2$, $f(0) = -1$, $g(0) = -2$, να αποδείξετε ότι :
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - 2}{x} = 0$$
23. Έστω η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x^2) = f(x)$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$.
(Υπόδειξη : Να θέσετε $g(x) = xf(x)$) (Απ. 2)
24. Δίνεται η άρτια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = (x^2 + 1)f(x) + 3x$.
α) Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της g ;
β) Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
γ) Να δείξετε ότι $g'(0) = 3$. (Απ. α) $\mathbb{R}$)
25. α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης :
- $$g(x) = \sqrt{x} f(x) + \frac{(x^2 - x)f(x)}{\ln x + 1}$$
- β) Αν $f(1) = f'(1) = 1$, να βρείτε τον αριθμό $g'(1)$.
- (Απ. α) $g'(x) = \frac{f(x) + 2xf'(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{(2x-1)f(x) + (x^2-x)f'(x)}{(\ln x + 1)^2}$, για $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$,
β) $g'(1) = \frac{5}{2}$)
26. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x + x^3) = 1 + x^3$. Να βρείτε τον αριθμό $f'(2)$.
(Απ. $f'(2) = \frac{3}{4}$)

27. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

α) $g(x) = x^{f(x)}$, $x > 0$ και β) $g(x) = [1 + (f(x))^2]^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$(\text{Απ. α}) \quad g'(x) = x^{f(x)} \left[f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} \right], \quad \beta) \quad g'(x) = [1 + (f(x))^2]^x \cdot \left[\ln(1 + f^2(x)) + x \frac{2f(x)f'(x)}{1 + (f(x))^2} \right]$$

28. Να βρείτε τη συνάρτηση $f'(f(x))$ αν $f(x) = \sin x$.

$$(\text{Απ. } f'(f(x)) = -\eta\mu(\sin x))$$

29. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = F(x)|x - 3|$, όπου $F(x)$ είναι πολυώνυμο νιοστού βαθμού. Αν η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $F(x)$ έχει ρίζα $\rho = 3$.

30. α) Αν $f(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $v \geq 2$, να αποδείξετε ότι

$$f(x) = (x - \rho)^2 \pi(x) \Leftrightarrow f(\rho) = f'(\rho) = 0$$

- β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x) = \alpha x^{v+2} - \beta x^{v+1} + 2$, $v \geq 2$.

$$(\text{Απ. } \beta) \quad \alpha = 2(v + 1) \quad \text{και} \quad \beta = 2(v + 2)$$

31. Οι συναρτήσεις $f(x) - xg(x)$ και $xf(x) + e^x g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\kappa f(x) + \lambda g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

32. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο α και η συνάρτηση $x^2 g(x) + (1 + \eta\mu^2 x)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο α , τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο α .

33. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \ln x$.

- α) Να βρεθεί αν ορίζεται η συνάρτηση $(f \circ g)'$.

- β) Να βρεθεί αν ορίζεται η συνάρτηση $f' \circ g'$.

- γ) Να εξετάσετε αν ισχύει: $(f \circ g)' = f' \circ g'$.

$$(\text{Απ. } (f \circ g)'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}, \quad (f' \circ g')(x) = -x^2, \quad x > 0)$$

34. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με πεδίο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f'(x) = f(x)$, να βρεθεί η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης $(f^{-1})'(x)$.

$$(\text{Απ. } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x})$$

35. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) - 2f^2(x) + 3f(x) = x^2 - 2x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = 2$, με $f'(2) + f'(0) = 0$.