

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

6
No

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της f , με :

$$f(x) = \varepsilon\phi x + \sigma\phi x$$

στο σημείο με τετμημένη $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$(\text{Απ. } \varepsilon : y = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right))$$

2. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x + \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Σε ποιά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f ορίζεται εφαπτομένη και σε ποιά όχι ;

(Απ. για κάθε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in \mathbb{R}^*$)

3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας του διαγράμματος της f , με τύπο $f(x) = x^3 - 1$, που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

$$(\text{Απ. οι εφαπτομένες είναι } \varepsilon_1 : y = x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 1 \text{ και } \varepsilon_2 : y = x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 1)$$

4. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f , με τύπο $f(x) = x^2 - 3x$, όταν αυτή σχηματίζει με τη διεύθυνση του ημιάξονα Ox γωνία $\frac{\pi}{4}$.

$$(\text{Απ. } \varepsilon : y = x - 4)$$

5. Αν $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x + 3$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο $A(-1, 1)$ εφαπτομένη ευθεία με κλίση 8.

$$(\text{Απ. } \alpha = \beta = 6)$$

6. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων να έχει συντελεστή διεύθυνσης 2, να εφάπτεται του διαγράμματος της f στο σημείο $M(1, 2)$.

(Απ. $\alpha = 0, \beta = 1$)

7. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α με $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f με $f(x) = \alpha^x$, να έχει εφαπτομένη την ευθεία με εξίσωση $y = x$. Βρείτε επίσης και τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

(Απ. $\alpha = e^{\frac{1}{e}}$, το σημείο επαφής θα είναι $(x_0, y_0) = (e, e)$)

8. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, άρτια και η κλίση της στο σημείο $x_0 = 3$ είναι 4, τότε να βρείτε την κλίση της f στο σημείο $x_1 = -3$.

(Απ. $f'(-3) = -4$)

9. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{7x^2 + \lambda x + \mu}{x^2 + 2x - 3}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε

τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ , ώστε η γραφική παράσταση της f να περνά από την αρχή των αξόνων και η εφαπτομένη ευθεία της στο σημείο με τετμημένη $x_0 = -2$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

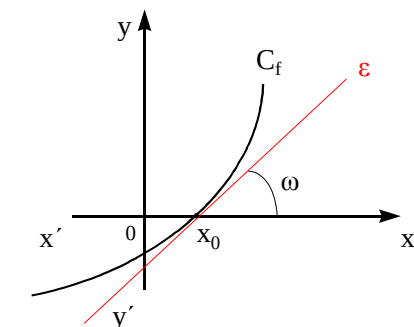
(Απ. $\mu = 0, \lambda = 20$)

10. Όταν το διάγραμμα μιας συνάρτησης f "τέμνει τον άξονα $x'x$ υπό γωνία ω " εννοούμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε της C_f στο σημείο τομής της C_f με τον $x'x$ σχηματίζει γωνία ω (με την διεύθυνση του ημιάξονα Ox) (σχήμα 1)

Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε το διάγραμμα της f , με τύπο :

$$f(x) = \frac{1}{4}(\alpha x - x^3), \text{ να τέμνει τον άξονα } x'x$$

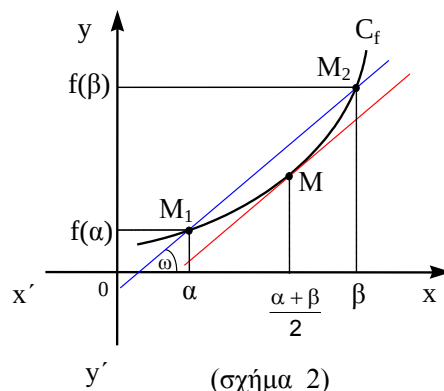
υπό γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$.

(Απ. $\alpha = 4$)

τομή της C_f με τον $x'x$ υπό γωνία ω (σχήμα 1)

11. Χορδή μιας παραβολής ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο διαφορετικά σημεία της παραβολής.

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η χορδή που περνά από τα σημεία M_1, M_2 (σχήμα 2) της γραφικής παράστασης της f , με τετμημένες α και β , αντίστοιχα είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη στο σημείο M της γραφικής παράστασης της με τετμημένη $\frac{\alpha + \beta}{2}$.



(σχήμα 2)

12. Να δείξετε ότι για $x = 0$ ή $x = \frac{2}{3}$, οι εφαπτομένες, στα σημεία με τετμημένες τις προηγούμενες τιμές των συναρτήσεων f και g με $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$, είναι παράλληλες.
13. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες ευθείες στα σημεία με τεταγμένη 1 του διαγράμματος της συνάρτησης g , με $g(x) = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, περνούν από την αρχή των αξόνων.

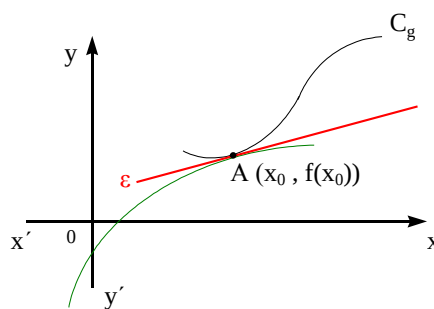
14. Δύο συναρτήσεις f και g για να έχουν σε κοινό σημείο (x_0, y_0) των διαγραμμάτων τους κοινή εφαπτομένη θα πρέπει να ισχύει ότι $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$ (σχήμα 3).

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με

$$f(x) = ax^2 + bx \text{ και } g(x) = \frac{1}{x}. \text{ Να προσδι-}$$

ορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, b ώστε τα διαγράμματα των συναρτήσεων f και g , να έχουν κοινή εφαπτομένη ευθεία ε στο σημείο $x_0 = 1$. Ποιά είναι η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης ;

(Απ. $\varepsilon : y = -x + 2$)

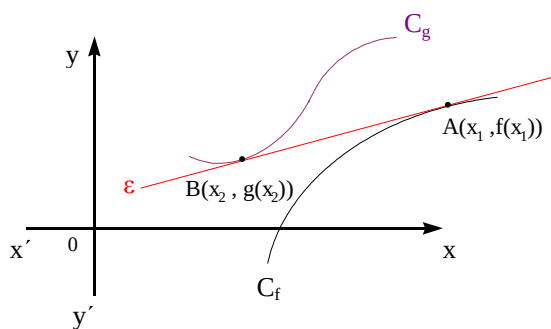


σχήμα 3

15. Δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f και g έχουν σε διαφορετικά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ κοινή εφαπτομένη (σχήμα 4) αν ισχύει $f'(x_1) = g'(x_2)$ και $f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2)$ (γιατί ;)

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x(x-1)^2 = 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$ δέχονται κοινή εφαπτομένη.



σχήμα 4

16. Δύο γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g , θα “εφάπτονται”, αν στο κοινό σημείο των C_f και C_g αν και μόνο αν έχουν κοινή εφαπτομένη.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = e^x$, $g(x) = 4 - e^{\lambda-x}$. Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να εφάπτονται.

(Απ. $\lambda = 2 \cdot \ln 2$)

17. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 1, & x < 2 \\ \gamma x^3 + 2, & x \geq 2 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο $A(2, f(2))$ εφαπτομένη ευθεία κάθετη στην ευθεία $2x + y - 4 = 0$.

(Απ. $\alpha = -\frac{1}{12}$, $\beta = \frac{5}{6}$ και $\gamma = \frac{1}{24}$)

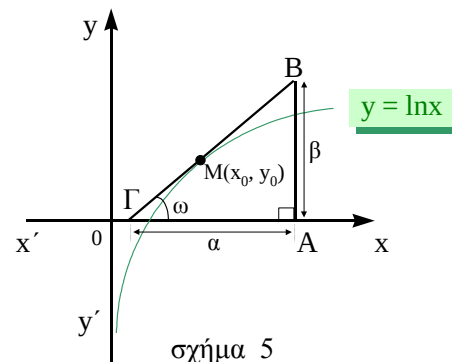
18. Αν $\varepsilon: y - 2x = 0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ στο σημείο $x_0 = -1$, να βρείτε την εφαπτομένη ευθεία ε_1 της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , με τύπο $g(x) = f\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ στο σημείο $x_1 = 1$.

(Απ. $\varepsilon_1: y = 4x - 6$)

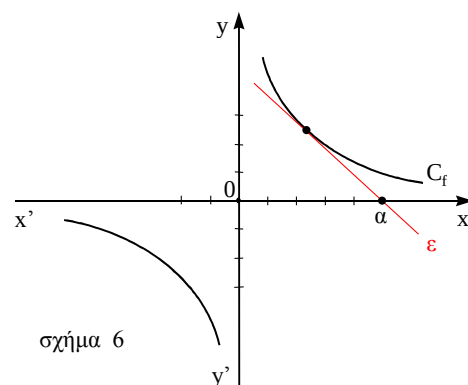
19. Αν $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 3$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β για τις οποίες η ευθεία $2x - y + 4 = 0$, είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(Απ. $\alpha = -4$ και $\beta = 3$)

20. Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = \ln x$ (σχήμα 5). Η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος α ($\alpha > 0$) και βρίσκεται στον ημιάξονα Ox . Η άλλη κάθετη πλευρά έχει μήκος β ($\beta > 0$). Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής $M(x_0, y_0)$ ως συνάρτηση των α, β .



(Απ. $M(x_0, y_0) = M\left(\frac{\alpha}{\beta}, \ln \frac{\alpha}{\beta}\right)$)



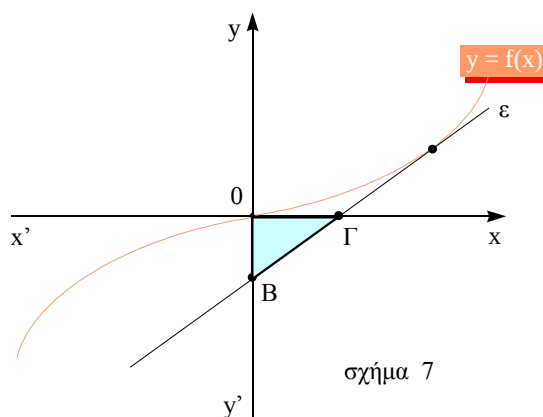
21. Να δείξετε ότι από κάθε σημείο $M(\alpha, 0)$, με $\alpha \neq 0$ του άξονα $x'x$ διέρχεται μία μόνο εφαπτομένη ευθεία στο διάγραμμα της συνάρτησης f , με $f(x) = \frac{1}{x}$. (σχήμα 6).

22. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Αν με $\lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\lambda \neq 0$ και $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ εφλ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τέμνει τον άξονα $x'Ox$ περισσότερες από μια φορά, να αποδείξετε ότι η κλίση της g στα σημεία τομής με τον άξονα των x είναι ίδια. Ποιά είναι αυτή η κλίση;

(Απ. $g'(x_0) = \varepsilon\phi\lambda$)

23. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x) = x^3 + 3x$ η οποία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $\frac{16}{9}$ τ.μ. (σχήμα 7).

(Απ. $y = 9x - 4\sqrt{2}$ ή $y = 9x + 4\sqrt{2}$)



24. Έστω συνάρτηση $f : [0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{\alpha})^2$, $\alpha > 0$. Αν τυχαία εφαπτομένη ευθεία ε της γραφικής παράστασης της f τέμνει τους ημιάξονες Ox , Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το άθροισμα $|\vec{OA}| + |\vec{OB}|$ είναι σταθερό.

25. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

β) Ποιά γωνία σχηματίζει η εφαπτομένη αυτή με τον άξονα $x'x$ με κατεύθυνση τον Ox και τον άξονα $y'y$ με κατεύθυνση τον Oy ;

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία που βρήκατε στο ερώτημα (α) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $E = g'(0)$, όπου $g(x) = \eta\mu 2x$.

(Απ. $\varepsilon : y = -x + 2$)

26. Να δείξετε ότι από το σημείο $P(\alpha, \beta)$, όπου $\beta < \alpha^2$ διέρχονται δύο εφαπτομένες της παραβολής $y = x^2$.

Επιπλέον αν το P είναι σημείο της ευθείας $y = -\frac{1}{4}$, τότε οι εφαπτομένες θα είναι κάθετες.

27. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\gamma, x \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(\kappa, \lambda)$. Αν από το A άγονται δύο εφαπτομένες προς την C_f , να αποδείξετε ότι $\alpha^2 \kappa^2 - \alpha\lambda + \alpha\gamma + \alpha\kappa\beta > 0$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x+2) + 2f(2-x) = \sin(\sqrt{3}x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ άξονα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' στο σημείο $x_0 = 2$.

(Απ. $\omega = 135^\circ$)