

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



6β

No

Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Ένα κινητό M κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y = \frac{x^3 + 2}{6}$.

- α) Τη χρονική στιγμή που το κινητό βρίσκεται στο σημείο $A(-2, -1)$, η τετμημένη αυξάνεται με ρυθμό 2 μον./s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη στιγμή που διέρχεται από το A .
- β) Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού είναι πάντα θετικός. Να βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι οκταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης.

$$(Απ. α) y'(t_0) = 4 \text{ μον./s. } β) B(4, 11), \Gamma\left(-4, -\frac{31}{3}\right)$$

2. Ένα σημείο A κινείται κατά μήκος της γραμμής με εξίσωση $y = \ln x$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $\alpha(t)$ του σημείου A δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = 2\alpha(t)$, να υπολογίσετε :

- α) το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής M της εφαπτομένης της C_f στο A με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το A έχει τετμημένη e .
- β) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A με τον $x'x$ άξονα, την ίδια χρονική στιγμή με το α) ερώτημα.

$$(Απ. α) x'(t_0) = -2e \text{ μον. μήκους/μον. χρόνου, } β) \theta'(t_0) = -\frac{2e}{e^2 + 1} \text{ rad/μον. χρόνου}$$

3. Ένα κινητό σημείο M κινείται στην καμπύλη $y = \ln x$. Καθώς το M περνάει από το σημείο $A(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ η τετμημένη x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το

δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \widehat{MOx}$, τη χρονική στιγμή που το κινητό M περνάει από το A .

$$(Απ. \theta'(t_0) = -\frac{4}{4e + 1} \text{ rad/sec})$$

4. Σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy σχεδιάζουμε την ημιευθεία με εξίσωση $y = x + 1$, με $x \geq 0$. Ένα σημείο A κινείται στην παραπάνω ημιευθεία και έστω B η ορθή προβολή του στον άξονα $x'x$. Τη χρονική στιγμή t_0 που οι συντεταγμένες του σημείου A είναι $(3, 4)$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Τη χρονική στιγμή t_0 να βρείτε το ρυθμό μεταβολής :

- α) του εμβαδού του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων,
 β) της απόστασης OA ,
 γ) της γωνίας $\hat{AOB}$.

$$(\text{Απ. } \alpha) \ E'(t_0) = 7 \text{ cm}^2/\text{s}, \quad \beta) \ d'(t_0) = 2,8 \text{ cm/s}, \quad \gamma) \ \theta'(t_0) = -\frac{2}{25} \text{ rad/s}$$

5. Έστω ένα κινητό σημείο M που κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^{x-1}$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $\alpha(t)$ του M είναι $\alpha'(t) = -3\alpha(t)$, να βρείτε :

- α) το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής A , της εφαπτομένης ε της καμπύλης στο M με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
 β) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη ε με τον $x'x$ την ίδια χρονική στιγμή του α) ερωτήματος.

$$(\text{Απ. } \alpha) \ -3 \text{ μον. μηκ./μον. χρόνου}, \quad \beta) \ -3/2 \text{ rad/μον. χρόνου}$$

6. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0, 3)$ και $B(6, 0)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της αντίστοιχης ευθείας AB .
 β) Ένα σημείο M κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα (ξεκινώντας από το άκρο A), ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 μον. μήκους/s . Έστω επίσης K και Λ οι ορθές προβολές του σημείου M στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του $OKM\Lambda$, τη χρονική στιγμή που :
 i) το OK είναι τετραπλάσιο του $O\Lambda$,
 ii) το $OKM\Lambda$ είναι τετράγωνο.

$$(\text{Απ. } \alpha) \ y = \frac{-x+6}{2}, \quad \beta) \text{i) } E'(t_1) = -2 \text{ τ.μ./s}, \quad \text{ii) } E'(t_2) = 2 \text{ τ.μ./s}$$

- 7*. Δίνεται μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει : $|iz + 2 - i| = |z - 5 - 6i|$.

- α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z .
 β) Αν η εικόνα του z κινείται πάνω στην ευθεία $\varepsilon : y = -x + 7$ και τη χρονική στιγμή που η εικόνα του z είναι το σημείο $A(3, 4)$ και το $\text{Re}(z)$ αυξάνεται με ρυθμό 2 μον. μήκους/s , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής :
 i) του $\text{Im}(z)$,
 ii) του $|z|$

$$(\text{Απ. } \beta) \text{i) } y'(t_0) = -2 \text{ μον. μήκους/s}, \quad \text{ii) } -2/5 \text{ μον. μήκους/s}$$