

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

7
NoΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ
ROLLE - ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (LAGRANGE)

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{2v} + \alpha x + \beta = 0$ με $v \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει δύο το πολύ διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{2v+1} + \alpha x + \beta = 0$ με $v \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει τρεις το πολύ διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.
- α) Αν το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x$ έχει ρίζα θετική ρ τότε να δείξετε ότι το πολυώνυμο $f'(x)$ έχει ρίζα θετική και μάλιστα μικρότερη του ρ .

β) Αν το πολυώνυμο $f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_v \neq 0$, έχει v ακριβώς διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$, τότε το πολυώνυμο $f'(x)$ θα έχει $v-1$ ακριβώς διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(Armado Rosa "Algebra")
- Αν το πολυώνυμο $f(x)$ έχει την $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι το $f(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.
- Αν η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$ και ισχύουν $f(\alpha) = f(\gamma)$ και $f'(\alpha) = f'(\gamma) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία $x_1, x_2 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοια ώστε $f''(x_1) = f''(x_2)$.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $a e^{\alpha x} - b e^{\beta x} - e^{\alpha} + e^{\beta} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

7. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g που είναι συνεχείς στο διάστημα $[α, β]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα $(α, β)$. Δίνεται ακόμα ότι $f(α) = f(β) = 0$, $g(α)g(β) \neq 0$, $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (α, β)$.
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (α, β)$, τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

(U of O)

8. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$. Είναι :

$$g(x) = h(x)f'(x) - h'(x)f(x)$$

Αν $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι μεταξύ δύο πραγματικών ριζών ρ_1, ρ_2 του $f(x)$ περιέχεται μια τουλάχιστον ρίζα του $h(x)$.

(Θέμα Ε.Μ.Ε.)

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[α, β]$ και $f(α) = f(β) = 0$.

α) Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση g , με τύπο $g(x) = \frac{f(x)}{x - x_0}$ και $x_0 \notin [α, β]$ υπάρχει αριθμός $\xi \in (α, β)$, τέτοιος ώστε $g'(\xi) = 0$.

β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία (ϵ) του διαγράμματος της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ περνά από το σημείο $N(x_0, 0)$.

(Θέμα Πανελληνίων Εξετάσεων)

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[2, 3]$ και με συνεχή παράγωγο στο $[2, 3]$. Επίσης ισχύουν ότι $f(3) = f(2) + \frac{19}{3}$ και $f'(2) > 6$. Να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει αριθμός $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = x_0^2$.

β) Υπάρχει αριθμός $\xi \in (2, 3)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 3\xi$.

11. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (α, β)$, τέτοιο που :

$$f'(\rho) = \frac{-(2\rho - \alpha - \beta)f(\rho)}{(\rho - \alpha)(\rho - \beta)}$$

β) Αν ακόμα $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (α, β)$, τέτοιο ώστε :

$$[f'(\rho)(\rho - \alpha) + f(\rho)]\rho = f(\rho)(\rho - \alpha)$$

12. Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο $[1, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) \neq 0$, $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$ και $f(1) \cdot f'(2) = f'(1) \cdot f(2)$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε $[f'(\xi)]^2 = f(\xi) \cdot f''(\xi)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, με $f(1) - f(0) = 1$.
Να αποδείξετε ότι :

α) Υπάρχει $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\theta) = 2 - 2\theta$.

β) Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(0) - f(\xi)}{\xi - 1}$.

14. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει :

- $f(0) = 0$ και
- $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχει σημείο $\gamma \in (0, 1)$, ώστε $f(\gamma) = \frac{1}{2}$.

β) υπάρχουν σημεία $\alpha \in (0, \gamma)$, $\beta \in (\gamma, 1)$, ώστε $\frac{1}{f'(\alpha)} + \frac{1}{f'(\beta)} = 2$.

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$, για την οποία ισχύουν $f(\alpha) = \beta + 4\alpha$, $f(\beta) = \alpha + 4\beta$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 9.$$

16. Να αποδείξετε τις επόμενες ανισότητες :

α) $\frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{\epsilon \phi \beta - \epsilon \phi \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \beta}$, $0 \leq \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

β) $e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$

γ) $\frac{1}{\alpha + 1} < \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) < \frac{1}{\alpha}$, για $\alpha > 0$

δ) $\sqrt{v+1} - \sqrt{v} < \frac{1}{2\mu}$, $\mu, v \in \mathbb{N}^*$, $v > \mu^2$.

17. Θεωρούμε τη συνάρτηση f , που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .

A. Αν $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε :

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{\ln f(\alpha) - \ln f(\beta)}{\alpha - \beta}$$

B. Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε :

$$f'(\xi)e^{f(\xi)} = \frac{e^{f(\beta)} - e^{f(\alpha)}}{\beta - \alpha}$$

18. Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ευθεία ε , η οποία τέμνει τη C_f σε τρία διαφορετικά σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

19. Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[2, 6]$ για την οποία ισχύει $2f(4) = f(2) + f(6)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 6)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$.

20. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$, με $f(-2) = 2$ και $f(2) = 6$. Να αποδείξετε ότι :

α) Υπάρχει $\rho \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 4 - \rho$.

β) Υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in (-2, 2)$ τέτοιοι ώστε : $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

21. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f' είναι $1 - 1$. Να δείξετε ότι κάθε εφαπτομένη της C_f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την C_f .

22. Μια συνάρτηση f είναι **συνάρτηση Lipschitz** σε διάστημα Δ , τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει αριθμός σταθερός λ ($\lambda > 0$), τέτοια ώστε :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2|, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \Delta.$$

(Δηλ. οι συναρτήσεις Lipschitz σ'ένα διάστημα Δ , είναι εκείνες οι συναρτήσεις που έχουν φραγμένο λόγο μεταβολής. Για τις συναρτήσεις αυτές αποδεικνύεται ότι είναι συνεχείς στο Δ , αλλά όχι κατ'ανάγκη παραγωγίσιμες σ'αυτό. Στο επόμενο πρόβλημα δίνεται μια ικανή συνθήκη ώστε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f να είναι συνάρτηση Lipschitz).

α) Δίνεται η συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f , που είναι και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $|f'(x)| \leq \lambda$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, $\lambda > 0$ και $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$, να δείξετε ότι :

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq \lambda |\xi_1 - \xi_2|$$

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, $f'(x) \geq \kappa$, για κάθε $x \in [0, 1]$, $\kappa > 0$ και $f(0) = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$,

με $\beta - \alpha = \frac{1}{2}$ ώστε : $f(x) \geq \frac{\kappa}{2}$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

23. Δίνεται η συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, την οποία ισχύει $f'(x) \geq x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.