

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

8
NoΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (LAGRANGE)
ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. α) Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$ και $f(e) = 3$. Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$, για κάθε $x \neq 0$.

Να υπολογίσετε τον τύπο της f όταν $f(1) = 0$ και $f\left(-\frac{1}{e}\right) = 1$.

2. Αν ισχύει ότι $f''(x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η παράσταση $[f'(x)]^2 + f^2(x)$ είναι σταθερή.

3. Αν είναι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f(4) = 2002$, να βρείτε τον τύπο της f .

4. α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x \text{ όπου } c \text{ σταθερά.}$$

β) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση g για την οποία ισχύουν :

$$g'(x)\sin x + g(x)\eta\mu x = g(x)\sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } g(0) = 1992$$

(Γενικές εξετάσεις 1992)
(Απ. $g(x) = 1992e^x \sin x$)

5. Αν $f'(x) + \sin x = f(x) + \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2004$, να βρείτε τον τύπο της f .

6. A. Αν ισχύει $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι :
- α) $f'(x) + f(x) = ae^x$, όπου a σταθερός για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- β) $2f(x)e^x - ae^{2x}$ είναι σταθερή συνάρτηση για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- B. Ποιός είναι ο τύπος της f αν $f(0) = 1$ και $f(1) = \frac{1}{e}$.
7. A. Να δείξετε ότι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- B. Αν ισχύει $f''(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, να δείξετε ότι :
- α) $[f'(x)]^2 + f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- β) $(f'(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2 + (f(x) - \eta\mu x)^2 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Γ. Να βρείτε τον τύπο της f .
8. Δίνεται μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $|f'(x)| \leq |x_1 - x_2|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ($x_1 \neq x_2$)
- α) Να δείξετε ότι $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^2$, για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
- β) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.
9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ ισχύει :
- $$f(x) - f(\psi) \leq (x - \psi)^2,$$
- να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.
10. Οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν :
- $f(g(x)) = x$ και $f'(g(x)) = x$ για κάθε $x > 0$
 - $f(1) = e^{2002}$
- Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g .
- (Απ. $f(x) = e^{x+2001}$, $g(x) = \ln x - 2001$, $x > 0$)
11. α) Να προσδιορίσετε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ώστε $f' = 3f - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β) Αν υποθέσουμε ότι $f(x)$ είναι μια λύση της (1), για την οποία $f(0) = 3$, να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $[f(x)]^2 - 4[f(x)] - 5 = 0$.
- (Απ. α) $f(x) = e^{3x+c}$)
12. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο που ικανοποιεί τις σχέσεις :
- $$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$
- $$f(0) = 2f'(0) = 1.$$
- Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .