

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

8β

No

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (LAGRANGE)
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

- Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(x) \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = -3$ και $f'(x)x - f(x) = 2x \ln x$, για κάθε $x > 0$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x + 1 + \ln x$, $x > 0$.
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να υπολογίσετε το πεδίο τιμών της f .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα το x_0 .
 - Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$, $x > 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.
 - Να αποδείξετε ότι ο αριθμός x_0 είναι ρίζα και της εξίσωσης $g(x) + x = 0$.
- Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \geq 0$.
 - Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g με $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$.
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) > e^x$.
 - Αν $f(1) = 2e$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, ώστε να ισχύει $f'(\xi) < e + f(\xi)$.
- Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύει $f(0) = g(0) = 0$ επίσης :

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-f(x)} \quad \text{και} \quad e^x \cdot g'(x) = e^x + 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
 - Να βρείτε τους τύπους των f, g συναρτήσεων.
 - Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$ ως προς τη μονοτονία.
 - Να λύσετε την ανίσωση $e^x [\ln(x^2 + 1) + x + 1] \geq 1$.

5. Δίνεται συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) < x$. Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \leq \frac{x^2}{2} + 1$.

6. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$f(f(x)) + x = 2f(x)$$

Να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

β) $f'(0) = 1$.

7. α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2), \quad 0 < \alpha < 1$$

8. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ισχύει : $x \cdot \ln x > x - 1$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

γ) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό κ , ώστε :

$$(1 + \kappa)^2 \cdot \ln(\kappa^2 + 5) = (\kappa^2 + 4) \cdot \ln(\kappa^2 + 2\kappa + 2)$$

9. Δίνεται συνάρτηση $f: (e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και συνάρτηση $g: (e, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(x) + \ln(g(x)) = 0$, όπου $g(x) = x \cdot f'(x)$ για κάθε $x > e$ και $f(e^2) = 0$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πεδίο τιμών της.

γ) Να εξετάσετε την ύπαρξη των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

10. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f''(x) < 0$ και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(x) > 0$.

11. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ η οποία στη θέση x_0 παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο το 0. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f''(x) > 4f'(x) - 4f(x) \text{ και είναι η συνάρτηση } g \text{ με } g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

α) να βρείτε το είδος του ακρότατου και να δείξετε ότι $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

β) να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) \geq 0$.

12. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$f^3(x) + f(x) = e^x - e^{-x} - 2$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

13. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$f^3(x) + 3f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

14. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει :

$$f^3(x) + f^2(x) + f(x) = x^2$$

Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα μόνο ακρότατο του οποίου να βρείτε το είδος και την τιμή του.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Αν ισχύει $f(\alpha + \beta) = -f(3\alpha + 4\beta)$, να βρείτε τους αριθμούς α και β .

16. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq 1 + x$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

17. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^\alpha \geq \alpha^x$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

18. Αν $0 < \alpha \neq 1$, $0 < \beta \neq 1$, $0 < \gamma \neq 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \geq 3$$

να δείξετε ότι $\alpha\beta\gamma = 1$.

19. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και διαφορετικοί της μονάδας και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\alpha_1^x + \alpha_2^x + \dots + \alpha_v^x \geq v, \quad v \in \mathbb{N}^*,$$

να αποδείξετε ότι $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v = 1$.

20. Αν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(4\eta\mu\alpha)^x + (\sigma\upsilon\nu\alpha)^x \geq 2$, να προσδιορίσετε τον αριθμό α .

$$(\text{Απ. } \alpha = \frac{\pi}{12} \text{ ή } \alpha = \frac{5\pi}{12})$$

21. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 2$ και :

$$f(x) \geq e^x + \sin x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

22. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει :

$$2f(x) - e^x \leq 2\ln x + x^2 + 1 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f(1) = \frac{e+2}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f'(1) = 2 + \frac{e}{2}.$$

23. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) < f(0) < f(3) < f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

24. Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2f(x) \geq f(1) + f(2), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = f(2)$,

β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'''(x_0) = 0$.

γ) η εξίσωση $f''(x) = f'(x)$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο $(1, 2)$.