

ΛΥΚΕΙΟ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Ασκήσεις

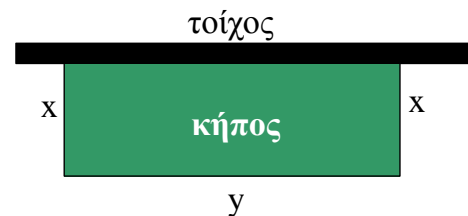
(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

8γ

No

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

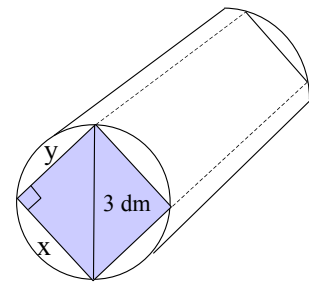
1. Θέλουμε να περιφράξουμε έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του οποίου η μια πλευρά (η μεγαλύτερη) είναι τοίχος (σχήμα 1). Έχουμε αγοράσει 1.600 μέτρα συρμάτινο πλέγμα για περιφράξη. Ποιές διαστάσεις πρέπει να έχει ο κήπος, ώστε να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια ;

(Απ. $x = 400$ m και $y = 800$ m)

(σχήμα 1)

κάτοψη του κήπου που πρέπει να περιφραχθεί

2. Από ένα μεταλικό κύλινδρο (σχήμα 2) διαμέτρου 3 dm θέλουμε να κατασκευάσουμε μια δοκό με κάθετη τομή ορθογώνιο διαστάσεων x, y dm. Αν η αντοχή της δοκού είναι ανάλογη του εμβαδού $x \cdot y$, να βρείτε τις διαστάσεις της ανθεκτικότερης δοκού που μπορούμε να κατασκευάσουμε.

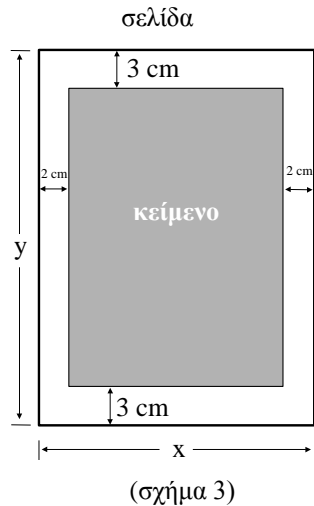
(Απ. $x = y \approx 2,11$ dm)

(σχήμα 2)

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .β) Να δείξετε ότι τα ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη που έχει εξίσωση

$$y = -\frac{1}{2}x^3.$$



4. Θέλουμε να τυπώσουμε σελίδες εμβαδού 384 cm^2 έτσι, ώστε τα περιθώρια του κειμένου να είναι 3 cm πάνω και κάτω και 2 cm δεξιά και αριστερά (σχήμα 3). Ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις κάθε σελίδας, ώστε το κείμενο να καταλαμβάνει το μέγιστο δυνατό χώρο της σελίδας ;

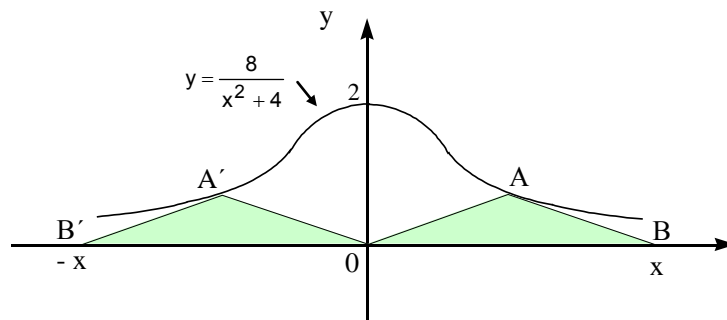
(Απ. $x = 16 \text{ cm}$ και $y = 24 \text{ cm}$)

5. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + x$, $a \neq 0$, παρουσιάζει στο σημείο $x = 1$ ακρότατο. Να βρείτε την τιμή του a και στη συνέχεια το είδος του ακρότατου.

(Απ. $a = -\frac{1}{2}$ και παρουσιάζει μέγιστο)

6. Αν A, A' είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με :

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4},$$



να βρείτε τις θέσεις των σημείων B, B' των ισοσκελών τριγώνων OAB και $OA'B'$ του σχήματος 4, για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων αυτών παίρνει τη μέγιστη τιμή.

(Απ. $x = 4$)

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή για $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

γ) Να αποδείξετε ότι είναι $\ln x \geq -\frac{1}{2x^2e}$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f .

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > x$ και $x > g(x)$ και να συμπεράνετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν τέμνονται, για κάθε $x > 0$.

β) Να βρείτε την μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$.

γ) Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει την μικρότερη απόσταση από την $y = x$.

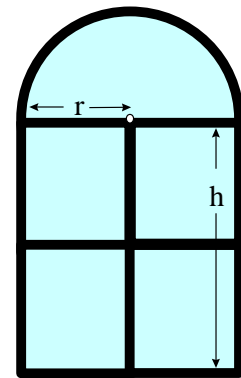
δ) Ποιά νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

9. Το σχήμα 5 παριστάνει ένα παράθυρο που αποτελείται από ένα ορθογώνιο ύψους h και από ένα ημικύκλιο ακτίνας r . Η περίμετρος του παράθυρου είναι 48 m.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση του r .

β) Για ποιές τιμές των r και h διέρχεται από το παράθυρο η μέγιστη δυνατή ποσότητα φωτός;

(Απ. $r = h = \frac{48}{4 + \pi}$)



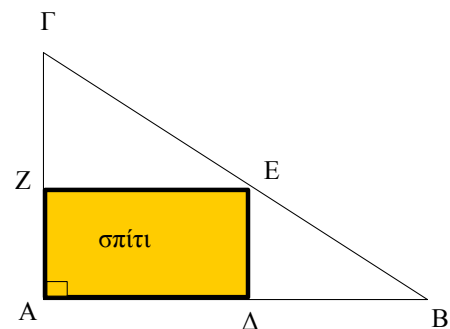
σχήμα 5

10. Στο σχήμα 6 φαίνεται η κάτοψη ενός σπιτιού σε σχήμα ορθογώνιο, το οποίο έχει κτιστεί στην ορθή γωνία ενός τριγωνικού οικοπέδου με μήκη πλευρών $AG = 100$ m και $AB = 150$ m.

α) Αν υποθέσουμε ότι $AD = x$, να εκφράσετε ως συνάρτηση του x το μήκος ED .

β) Για ποιά τιμή του x το σπίτι θα έχει το μέγιστο εμβαδόν;

γ) Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν του σπιτιού.



σχήμα 6

(Απ. $x = 75$ m)

11. Ένας μαγνήτης είναι τοποθετημένος σε απόσταση x από το κέντρο κυκλικού πηνίου ακτίνας R . Ηλεκτρικό ρεύμα, που διατρέχει το πηνίο, ασκεί στο μαγνήτη

δύναμη : $F(x) = c \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}$, όπου c θετική σταθερά. Να βρείτε για ποιό x

γίνεται μέγιστη η δύναμη αυτή.

(Απ. $x = R/2$)

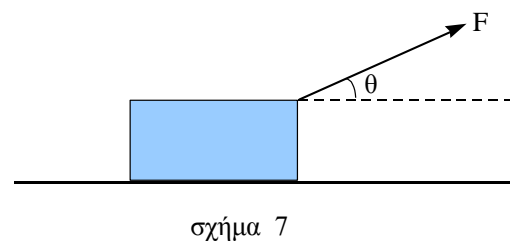
12. Ο W. Estes έχει ασχοληθεί με την καμπύλη εκμάθησης ενός πειραματόζωου. Το πειραματόζωο μέσα σ' έναν ελεγχόμενο χώρο έπρεπε να επιλέξει τον κατάλληλο μοχλό ώστε να πάρει το φαγητό του. Με την πάροδο του χρόνου το πειραματόζωο είχε όλο και μεγαλύτερο αριθμό σωστό επιλογών r (σε μια βδομάδα) τις οποίες ο ερευνητής προσέγγισε μέσω του τύπου

$$r(t) = \frac{13}{1 + 25e^{-0,24t}} \quad (t \text{ ο χρόνος σε βδομάδες εκπαίδευσης}).$$

- α) Να εξετάσετε αν το πειραματόζωο θα βελτιώνει συνεχώς τις επιδόσεις του.
β) Τί θα συμβεί αν το πείραμα συνεχιστεί για μεγάλο χρονικό διάστημα ;

13. Σώμα βάρους B σύρεται σε οριζόντιο επίπεδο από μία δύναμη F που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο (σχήμα 7). Αν το μέτρο της δύναμης είναι :

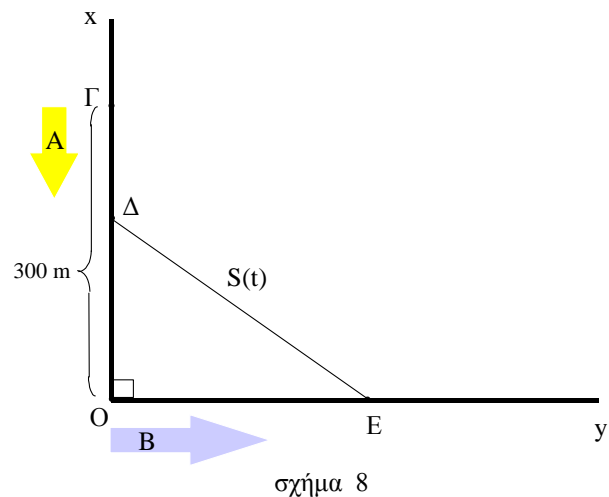
$$F = \frac{\kappa \cdot B}{\kappa \eta \mu \theta + \sigma \nu \theta}$$



όπου κ ο συντελεστής τριβής, να βρείτε τη γωνία θ , ώστε το μέτρο της δύναμης F να γίνεται ελάχιστο.

(Απ. $\epsilon \phi \theta = \kappa$)

14. Δύο ευθύγραμμοι δρόμοι Ox και Oy διασταυρώνονται κάθετα στο O (σχήμα 8). Ένα αυτοκίνητο A βρίσκεται στο δρόμο Ox σε απόσταση 300 km από τη διασταύρωση, ενώ ένα άλλο αυτοκίνητο B βρίσκεται στο O . Τα A, B αρχίζουν ταυτόχρονα να κινούνται με ταχύτητες 60 km/h και 80 km/h αντίστοιχα. Το A κινείται προς το σημείο O , ενώ το B απομακρύνεται από το O ακολουθώντας το δρόμο Oy .



α) Ύστερα από πόσο χρόνο η απόσταση $S(t)$ των δύο αυτοκινήτων γίνεται ελάχιστη ;

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των δύο αυτοκινήτων 2 ώρες αφότου ξεκίνησαν.

(Απ. $t = 9/5 \text{ h}$, $S'(2) = 8,3 \text{ km/h}$)

15. Ο αριθμός των βακτηριδίων σε μια καλλιέργεια t ώρες μετά την έναρξη ενός πειράματος δίνεται, κατά προσέγγιση σε χιλιάδες από τη συνάρτηση :

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}+1}, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{1}{5}e^3 \cdot t + \frac{9}{5}e^3, & t > 4 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος εισήχθη μια τοξική ουσία μέσα στην καλλιέργεια).

- α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά την έναρξη του πειράματος. (Θεωρήστε ότι $e \approx 2,718$).
- β) Να εξετάσετε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον πληθυσμό των βακτηριδίων τη χρονική στιγμή $t_0 = 4$.
- γ) Να εξετάσετε την μεταβολή του πληθυσμού κατά τη διάρκεια του πειράματος.
- δ) Πότε ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα εξαφανιστεί ;
- ε) Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια του πειράματος όπου ο πληθυσμός των βακτηριδίων είναι e^2 χιλιάδες .

16. Δίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$, το οποίο είναι πάνω

από τον άξονα $x'x$.

Δίνονται επίσης σημεία Β, Γ του τμήματος της παραβολής συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Έτσι το τρίγωνο ΟΒΓ που σχηματίζεται είναι ισοσκελές με Ο να είναι η αρχή των αξόνων και $OB = OG$.

- α) Να βρείτε τα σημεία Β, Γ για τα οποία το τρίγωνο ΟΒΓ έχει μέγιστο εμβαδόν.
- β) Ποιό είναι αυτό το μέγιστο εμβαδό ;

17. Σε ένα σχολείο άρχισε να κυκλοφορεί μεταξύ των μαθητών μια φήμη για την πενθήμερη εκδρομή του σχολείου. Ο αριθμός $N(t)$ των μαθητών που άκουσαν τη φήμη βρέθηκε ότι μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο :

$$N(t) = M(1 - e^{-0,5t})$$

όπου M ο συνολικός αριθμός των μαθητών του σχολείου και t ο χρόνος σε μέρες (από τη στιγμή που πρωτοκυκλοφόρησε η φήμη).

- α) Να δείξετε ότι συνεχώς και περισσότεροι μαθητές ακούν τη φήμη.
- β) Να δείξετε ότι τελικά όλοι οι μαθητές θα ακούσουν τη φήμη.