

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

9
No

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να μελετήσετε ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 6, & x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 15x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

$$\beta) g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 8, & x \leq 2 \\ 16 - x^2, & x > 2 \end{cases}$$

(Απ. α) σημεία καμπής στις θέσεις 0, 1, 3, β) σημείο καμπής στη θέση -1)

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^2 x^4 - 4\alpha x^3 + 6(2\alpha - 1)x^2 - 4x + 11$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιές τιμές του α η C_f έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 1$.

(Απ. $\alpha = -1$)

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^4 + \lambda x^3 + (3\lambda - 9)x^2 - 7x + 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(Απ. $4 \leq \lambda \leq 12$)

4. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι δεν έχει περισσότερα από ένα ακρότατα.

5. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε είναι σταθερή συνάρτηση.

(Υπ. Αρκεί να δείξετε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

6. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ακρότατων της f , υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.
7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^{x-1}$.
- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $e^{x-1} \geq \frac{x+2}{x^2 - 4x + 6}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^4$.
- α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 1 + 2x - x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
9. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = f(4) = 0$.
Αν η f είναι κοίλη, τότε :
- α) να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
- β) Να υπολογίσετε το όριο της $g(x) = \frac{f(1)x^5 + x^2 - 1}{f(5)x^2 - x + 2}$, όταν $x \rightarrow -\infty$.
10. Δίνεται, η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το 0 και για την οποία ισχύει :
- $$f''(x) > 4(f'(x) - f(x)), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-2x} f(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
11. Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[-\alpha, \alpha]$, με $\alpha > 0$, για την οποία ισχύει $f(0) = f'(0) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-\alpha, 0) \cup (0, \alpha]$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) \neq 0$.
12. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι :

$$f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

13. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$.
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- δ) Να αποδείξετε ότι $x f'(x) \leq f(x) \leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, ώστε : $2f(\xi) = (\xi - 1) \sqrt{e^\xi}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει :

$$f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 2x - 1$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f'(1)$ και $f(1)$.
- β) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = \ln f(x)$, με $x \in \mathbb{R}$.
 - i) Να μελετήσετε τη g ως προς τη κυρτότητα.
 - ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B(1, g(1))$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $e^2 f(x) \geq e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x) \cdot f'(x) = c, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } c \neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

16. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + (x - 4) f(x) + x^2 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.