

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

9β

No

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΕΥΘΕΙΣ

ΚΑΝΟΝΕΣ de L' Hospital

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + x - 1 + \eta\mu x}{x + 1}$.

α) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη ευθεία ε_1 , αν υπάρχει, της C_f .

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη ευθεία ε_2 , αν υπάρχει, της C_f στο $+\infty$.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ε_2 με την C_f .

(Απ. α) $\varepsilon_1 : x = -1$, β) $\varepsilon_2 : y = x$,

γ) άπειρα σημεία M_k της μορφής $M_k (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ με $k \in \mathbb{Z}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $g : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = 2014x + e^x (7 - x)$.
Να βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες της C_g .

(Απ. $\varepsilon : y = 2014x$ στο $-\infty$)

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha x + \beta - \sqrt{x^2 + x + 1}) = 1$$

(Απ. $\alpha = 1$, $\beta = 3/2$)

4. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 3$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) - 4x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}{x^2 f(x) - 2x^3 + x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}$.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) - 2x^2 + \lambda x + 13}{\lambda f(x) - 4x + 21} = \frac{4}{7}.$$

(Απ. α) $\frac{1}{2}$, β) $\lambda = -5$)

5. Αν η ευθεία $\varepsilon : y = 2x - 7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, όταν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha^2 - 1)f(x) - 4\alpha x - 7}{xf(x) - 2x^2 + (\alpha + 5)x - 4} = 4.$$

(Υπ. $\alpha = 1$ ή $\alpha = 3$)

6. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, ώστε η ευθεία $\varepsilon : y = \alpha x - 6$, να είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με

$$f(x) = \frac{4\alpha x^2 - 12x + 5}{\beta x - 2}, \text{ στο } +\infty.$$

(Απ. $\alpha = -6$ και $\beta = 4$)

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 7}{x + \gamma}$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των α, β, γ , ώστε η C_f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon_1 : x = 1$ και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\varepsilon_2 : y = 2x + 3$.

(Απ. $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$)

8. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, με $\beta > 0$, για τους οποίους η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = 2\alpha x + \sqrt{4\beta x^2 + \gamma x - 2}$ έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη μια ευθεία παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1 : y = 4x - 3$ και στο $-\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon_2 : y = 1$.

(Απ. $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -4$)

9. Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $3x + 5 \leq f(x) \leq \frac{3x^3 + 5x^2 + 2}{x^2}$, για κάθε $x \neq 0$.

Να εξετάσετε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

(Απ. $\varepsilon : y = 3x + 5$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και $+\infty$)

10. Να υπολογίσετε τα όρια στις επόμενες περιπτώσεις :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{-x}) \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) \quad \delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^x) \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x}) \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) \quad \eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) \quad \iota) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln x}{x}\right) \quad \iota\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) \quad \iota\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\text{ιγ)} \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - e^x) \ln x]$$

$$\text{ιδ)} \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - e^{-x}) \ln x]$$

$$\text{ιε)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x \ln x)$$

$$\text{ιστ)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} \ln x)$$

$$\text{ιζ)} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta \mu x}$$

$$\text{ιη)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$\text{ιθ)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{κ)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

$$\text{κα)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$$

$$\text{κβ)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + x) - x]$$

11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f(0) = f'(0) = 0$$

Επίσης η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο 0 , με $f''(0) = 4$.
Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{α)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$\text{β)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(x) + f^2(x) + f(x)}{f(x) f'(x) + e^x - x - 1}$$

(Απ. α) 2 , β) 12)

12. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι :

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Αν επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{6h^2} = x + 2$$

και $f'(1) = f(1) = 10$, τότε να βρείτε τον τύπο της f .

$$(\text{Απ. } \beta) f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x + 8$$