

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

9γ
No

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(ΘΕΜΑ Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2018)

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right)$, $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

B3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

(ΘΕΜΑ Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2017)

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .
- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(ΘΕΜΑ Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2016)

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
- β.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
- γ.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- δ.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Τα ερωτήματα α, β, γ αποτελούσαν το ΘΕΜΑ 2^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2004)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Στα πλαίσια των Πανελλαδικών – Πανελληνίων – Απολυτηρίων Εξετάσεων της περιόδου 2000 – 2018, έχουν ζητηθεί, σχετικά με μελέτη συνάρτησης, τα εξής :

5. Μελέτη της $f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$, $t \geq 0$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα με α ,

β να είναι σταθεροί και θετικοί πραγματικοί αριθμοί, δίνεται ότι $f_{\max} = 15$, όταν $t = 6$

(Υπ. $\alpha = 5$ και $\beta = 6$)

(Από το ΘΕΜΑ 4^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων Μαθητικά θετικής κατ/νσης, Ιούνιος 2000)

6. Μελέτη της $f(t) = 8 \ln(t + 1) - 2t$, $t \in [0, +\infty)$, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Από το ΘΕΜΑ 4^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων Μαθητικά τεχνολογικής κατ/νσης, Ιούνιος 2000)

- 7.** Μελέτη της f με $f(x) = x^5 + x^3 + x$, ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να αποδειχθεί ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
(Από το ΘΕΜΑ 3^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2003)
- 8.** Μελέτη της f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$, ως προς τη μονοτονία.
(Από το ΘΕΜΑ 3^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2005)
- 9.** Μελέτη της $f(x) = 2 + (x - 2)^2$ με $x \geq 2$, ως προς $1 - 1$ και εύρεση αντίστροφης.
(Από το ΘΕΜΑ 2^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2006)
- 10.** Μελέτη της $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$, ως προς το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
(Υπ. να μελετηθεί η f και ως προς τη μονοτονία)
(Από το ΘΕΜΑ 4^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2006)
- 11.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ως προς τη μονοτονία, ακρότατα και σημεία καμπής.
(Από το ΘΕΜΑ 3^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2007)
- 12.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ως προς τη συνέχεια στο 0, τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της.
(Από το ΘΕΜΑ 3^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2008)
- 13.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = e^x - \ln(x + 1)$, $x > -1$ ως προς την κυρτότητα και τη μονοτονία της.
(Από το ΘΕΜΑ 3^ο των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2009)
- 14.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία της.
(Από το ΘΕΜΑ Γ των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2010)
Να μελετηθεί η f επίσης ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής, το σύνολο τιμών και να γίνει χάραξη της C_f .
- 15.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία της.
(Από το ΘΕΜΑ Δ των Απολυτηρίων Εξετάσεων, Μάιος 2010)

- 16.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την ύπαρξη δύο ακριβώς σημείων καμπής της C_f .

(Από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελληνίων Εξετάσεων, Μάιος 2011)

- 17.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = (x - 1) \ln x - 1$, $x > 0$ ως προς τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της. (Χάραξη της C_f)

(Από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελληνίων Εξετάσεων, Μάιος 2012)

- 18.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία της. (Χάραξη της C_f)

(Από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Μάιος 2013)

- 19.** Μελέτη της συνάρτησης $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα, την οριζόντια ασύμπτωτη της h στο $+\infty$ και την πλάγια ασύμπτωτη της στο $-\infty$. (Χάραξη της C_f)

(Από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Μάιος 2014)

- 20.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$

και τη μονοτονία της.

Επίσης να μελετηθεί η $g(x) = (x f(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2$, ως τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Από το ΘΕΜΑ Δ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Μάιος 2014)

- 21.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της. (Χάραξη της C_f)

(Από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Μάιος 2015)

- 22.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.

(Από το ΘΕΜΑ Δ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Μάιος 2015)

Να γίνει επίσης η χάραξη της C_f .

- 23.** Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα της.

(Από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Μάιος 2016)

24. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$, ως προς τη συνέχεια

στο $[-1, \pi]$, τα κρίσιμα σημεία της, επίσης τη μονοτονία, τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της.

(Από το ΘΕΜΑ Δ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Ιούνιος 2017)

25. Μελέτη της συνάρτησης $E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in (0, 8)$ ως προς το ακρότατό της.

(Από το ΘΕΜΑ Γ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Ιούνιος 2018)

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η C_f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

(Από το ΘΕΜΑ Δ των Πανελλαδικών Εξετάσεων, Ιούνιος 2018)

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 e^{x^2-1} + kx + \lambda$, $x \in \mathbb{R}$ με $k, \lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $O(0, 0)$.

α. Να υπολογίσετε τα k, λ .

β. Για $k = \lambda = 0$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να γίνει η χάραξη της C_f .

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

β. Να βρεθούν αριθμοί A και B ώστε $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$.

γ. Να γίνει η μελέτη της f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες (αν υπάρχουν) και να γίνει η χάραξη της γραφικής της παράστασης.

29. Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι επόμενες συναρτήσεις :

α. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

β. $g(x) = \frac{x}{x-2}$

γ. $h(x) = x - \frac{1}{x}$

δ. $t(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$

ε. $s(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

στ. $w(x) = (x-2)e^x$

ζ. $z(x) = x - \ln x - 1$

η. $\varphi(x) = x - \sin x$, $x \in [0, \pi]$