

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

9δ
NoΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

2. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις επόμενες συναρτήσεις :

α) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

β) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

γ) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

δ) $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 2}$

ε) $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$

στ) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1}$

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις επόμενες συναρτήσεις :

α) $f(x) = e^x (x^2 - 2x + 2)$

β) $f(x) = x^2 e^{-x}$

γ) $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

δ) $f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

4. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις επόμενες συναρτήσεις :

α) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

β) $f(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$

5. α) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ και να χαράξετε τη C_f .

7. Να μελετήσετε τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}, & \text{αν } x > 1 \\ \frac{x^2}{x-1}, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

και να χαράξετε τη C_f .

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 4}{x - 1}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, της οποίας η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = -x + 2$.

α) Να βρείτε τα α, β .

β) Για $\alpha = -1$ και $\beta = 3$, να γίνει η χάραξη της C_f .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f και να χαράξετε τη C_f .

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{\alpha}{x^2 + 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{3}) = 2$

$$\text{και } 2x f(x) + x^2 f'(x) = -3 f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{12}{x^2 + 3}$.

β) Να μελετήσετε την f και να χαράξετε τη C_f .

11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 1$

$$\text{και } x f(x) + x^2 f'(x) = 1, \text{ για κάθε } x > 0,$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

β) Να μελετήσετε την f και να χαράξετε τη C_f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $ex = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτησης f είναι $1-1$ (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της. (μονάδες 4)

B4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

(ΘΕΜΑ Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2019)

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = e^x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη της.

B3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

B4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

(ΘΕΜΑ Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2020)

14. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

(από το ΘΕΜΑ Γ, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2019)

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda & , x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sin x & , 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\lambda > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .

(από το ΘΕΜΑ Γ, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2020)

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0^2 - (e + 2)x_0 + e - 1$.

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta \mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Δ3. Αν x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

(από το ΘΕΜΑ Δ, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2020)

17. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x - 1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\epsilon): y = -x + 2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, 1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(από το ΘΕΜΑ Δ, Πανελλαδικές Εξετάσεις, Ιούνιος 2019)