

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣΑΝΑΛΥΣΗ
2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ10
No

Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = \sqrt{2}$ και $f^3(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{4} e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί ο τύπος της f . (Απ. $f(x) = \sqrt[4]{e^x + 3}$)
- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = 1 - 4x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

β) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - 2x + x \ln x$.
- α) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει αριθμός $\xi \in \mathbb{R}$, στον οποίο η f να παρουσιάζει ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 2007$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 0$.
- Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f . Αν υπάρχει $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $\frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{f(\alpha)}{\alpha} + 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \xi + \frac{f(\xi)}{\xi}$.
- Η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι : $e^{f'(x)} \cdot f''(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon : y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(0, f(0))$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$, $f(0)$ και τη συνάρτηση f' .

β) Ελέγξτε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$.

γ) Δείξτε ότι $|f(x)| \geq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = kf(x) + g(x)$ και $g'(x) = kg(x) - f(x)$, $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ με $k \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = [f^2(x) + g^2(x)]e^{-2kx}$ είναι σταθερή και ότι ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = e^{2kx}$.

7. **A.** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν $f'(\alpha) > 0$, $f'(\beta) < 0$.
- α)** Δικαιολογήστε γιατί υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο η f παίρνει μέγιστη τιμή.
- β)** Δείξτε ότι $f'(\xi) = 0$.
- B.** Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f του **A** ερωτήματος είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f'(\alpha) \cdot f'(\beta) < 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$.
- Γ.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, να αποδείξετε :
- α)** $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- β)** Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα το πολύ σ'ένα σημείο.
8. **α)** Αν το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, με $a > 0$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$).
- Αν υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$ να βρείτε το είδος των ακρότατων που παρουσιάζει το $P(x)$ σ'αυτά τα σημεία.
- β)** Αποδείξτε ότι $\beta^2 > 3\alpha\gamma$.
- γ)** Να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του **α)** ερωτήματος.
- δ)** Είναι δυνατόν το πολυώνυμο $P(x)$ να παρουσιάζει σημείο καμπής σε κάποια από τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $P'(x) = 0$;
9. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στι $\mathbb{R}$, ώστε $f^{(3)}(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α)** Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει το πολύ ένα σημείο καμπής.
- β)** Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ευθεία που να εφάπτεται σε δύο διαφορετικά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της f .
10. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι τέτοια ώστε :
- $$f(x-2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq f(x-3) + 2x - 4$$
- για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και τέμνει τη C_f σε δύο διαφορετικά σημεία A και B .
- α)** Να βρείτε τον τύπο της f .
- β)** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα A, B τέμνονται κάθετα.