

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

10β

No

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΟΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

- Μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα :

$$f(xy) = f(x) + f(y) + xy - x - y - 1, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$
 - Να βρεθεί η τιμή $f(1)$.
 - Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 3$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και να βρεθεί ο τύπος της.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2x$ όταν $x \in (0, 2]$.
 (Απ. α) $f(1) = 2$ β) $f(x) = 2\ln x + x + 1, x \in (0, +\infty)$)
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .
 Αν $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$, να αποδείξετε ότι :
 - Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = -2$.
 - Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(x_0) = x_0$.
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$, ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.
- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(2) = f(4) = 0$ και τη συνάρτηση $g(x) = -f(3)(x^2 - 6x + 8)$.
 - Να δείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $x_1, x_2 \in (2, 4)$ με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε $f'(x_1) = g'(x_1)$ και $f'(x_2) = g'(x_2)$.
 - Να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (2, 4)$ ώστε $f''(\xi) = -2f(3)$.
 (Υπ. α) θεωρούμε συνάρτηση $F(x) = f(x) - g(x) \dots$)
- Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη της οποίας η γραφική παράσταση δέχεται στο σημείο $A(1, 1)$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = x + 1$. Επίσης ισχύει ότι $f''(x) > f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Να δείξετε ότι $f'(x) < f(x)$ για κάθε $x < 1$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x > 1$.
 - Να δείξετε ότι $f(x) \geq e^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x\ln x$, με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x + 1)}$, με $x \in (0, +\infty)$.

i) Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να λύσετε την ανίσωση : $\ln(x^2 + 3)\ln(2x^2 + 3) < \ln(2x^2 + 2)\ln(x^2 + 4)$

(Απ. α) $f(A) = (0, +\infty)$, β) i) g είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $g(A) = (-\infty, 1)$
ii) $x < -1$ ή $x > 1$).

6. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + x - e^x$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1. Να βρείτε :

α) τον αριθμό α ,

β) το σύνολο τιμών της f ,

γ) το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda - \lambda^2 - e^\lambda)x^3 - 7x^2 + 13x - 21]$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Απ. α) $\alpha = -1$, β) $f(A) = (-\infty, 1]$, γ) $+\infty$)

7. Μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$f'(x) + xf''(x) = -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ έχει εξίσωση

$$y = x - \ln(2e)$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2010$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $(0, +\infty)$

(Απ. α) $f(x) = \ln x - x$, β) -1 , γ) $f(A) = (-\infty, -1]$)

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\ln 3) = \ln 2 \quad \text{και} \quad 2f'(x) = e^{x-f(x)}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f .
 β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
 γ) Αν ισχύει $f(x) \geq ax$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.

$$(\text{Απ. } \alpha) \quad f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\beta) \quad \eta \quad f \quad \text{είναι γν. αύξουσα και κυρτή, } \gamma) \quad a = \frac{1}{2}$$

- *9. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή.

Επίσης ο αριθμός : $z = \frac{2 - (f(1) + 2)i}{f(2) + i}$ είναι φανταστικός και ο $w = \frac{4 + if(1)}{1 + if(2)}$ έχει μέτρο 2.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $2f(x)f'(x) = 2x - 3$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.
 γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
 δ) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 .
 ε) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f'(2)x - 2f'(2) + 2$ και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$(\text{Απ. } \alpha) \quad f(1) = f(2) = 2, \quad \beta) \quad \Theta. \text{ Rolle στη } g(x) = f^2(x) - x^2 + 3x \dots$$

$$\gamma) \quad \Theta. \text{ Rolle στην } f \dots \quad \epsilon) \quad \text{εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } (2, f(2)) \dots$$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει :

$$f(x) - g(x) = x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη του διαγράμματος της f στην περιοχή του $+\infty$, τότε :

$$\alpha) \quad \text{Να υπολογίσετε τα όρια : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 5x + \eta\mu 2x}{x \cdot f(x) - 3x^2 + 1}.$$

- β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στην περιοχή του $+\infty$.

$$(\text{Απ. } \alpha) \quad 2 \quad \text{και} \quad -1$$

Τρίτα Θέματα Πανελληνίων

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = f'(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση :

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.
- δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στα διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. (Θέμα Γ, 2011)

12. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- β) Να λύσετε την εξίσωση :

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

- γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του $y'y$ άξονα. (3 από τα 4 υποερωτήματα του Θέματος Γ, 2010)

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = a^x - \ln(x + 1)$, $x > -1$, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$.

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

B. Για $a = e$,

- α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.
- β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- γ) αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{\beta - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{\gamma - 2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

(Θέμα 3°, 2009)