

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Θεωρία και Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

11
No

ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός παράγουσας συνάρτησης : Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ του $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση F στο Δ , έτσι ώστε $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η F ονομάζεται **παράγουσα** συνάρτηση της f στο διάστημα Δ .

Θεώρημα (παραγουσών της f) : Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ και F μια παράγουσά της, τότε οποιαδήποτε άλλη παράγουσα της f είναι της μορφής $F(x) + c$ και μόνο αυτής, όπου c σταθερά.

Πίνακας Παραγουσών Βασικών Συναρτήσεων

1) $f(x) = 0$, $F(x) = c$, c : σταθερά.

2) $f(x) = 1$, $F(x) = x + c$.

3) $f(x) = x^v$, $F(x) = \frac{x^{v+1}}{v+1} + c$, $v \neq -1$
αν $v \in \mathbb{N}$, τότε $x \in \mathbb{R}$,
αν $v \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, τότε $x \neq 0$,
αν $v \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, τότε $x > 0$.

4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln x + c$, $x > 0$.

5) $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x + c$.

6) $f(x) = a^x$, $F(x) = \frac{1}{\ln a} a^x + c$,
με $0 < a \neq 1$

7) $f(x) = \eta \mu x$, $F(x) = -\sigma \upsilon \nu x + c$.

8) $f(x) = \sigma \upsilon \nu x$, $F(x) = \eta \mu x + c$.

9) $f(x) = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x}$, $F(x) = \epsilon \phi x + c$,
για $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $k \in \mathbb{Z}$.

10) $f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$, $F(x) = -\sigma \phi x + c$,
για $x \neq k\pi$ και $k \in \mathbb{Z}$.

Σε όλες τις περιπτώσεις είναι $F'(x) = f(x)$.

Πίνακας Παραγουσών

Σύνθετων Συναρτήσεων

1) $f(x) = \frac{g'(x)}{g^2(x)}$, $F(x) = -\frac{1}{g(x)} + c$, $g(x) \neq 0$.

2) $f(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$, $F(x) = 2\sqrt{g(x)} + c$, $g(x) > 0$.

3) $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, $F(x) = \ln(g(x)) + c$, $g(x) > 0$.

4) $f(x) = g^a(x)g'(x)$, $F(x) = \frac{(g(x))^{a+1}}{a+1} + c$,
είναι $g(x) > 0$, αν $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq -1$.

5) $f(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$, $F(x) = e^{g(x)} + c$.

Σε όλες τις περιπτώσεις είναι $F'(x) = f(x)$.

Πίνακας Παραγουσών

(από κανόνες παραγώγισης)

1) $h(x) = f'(x) + g'(x)$, $H(x) = f(x) + g(x) + c$.

2) $h(x) = k \cdot f'(x)$, $H(x) = k \cdot f(x) + c$, $k \in \mathbb{R}$.

3) $h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $H(x) = f(x) \cdot g(x) + c$.

4) $h(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + c$.

5) $h(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, $H(x) = f(g(x)) + c$.

Σε όλες τις περιπτώσεις είναι $H'(x) = h(x)$.

1. Σε κάθε μία από τις επόμενες περιπτώσεις να βρείτε τις παράγουσες $G(x)$ των συναρτήσεων $g(x)$. Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις g είναι ορισμένες σε διάστημα Δ (όχι σε ένωση διαστημάτων).

α) $g(x) = f'(x)$

β) $g(x) = f^k(x) \cdot f'(x)$, $k \neq -1$ και $f(x) > 0$.

γ) $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, με $f(x) \neq 0$

δ) $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, με $f(x) > 0$.

ε) $g(x) = \sin(f(x)) \cdot f'(x)$

στ) $g(x) = \eta\mu(f(x)) \cdot f'(x)$

ζ) $g(x) = \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$

η) $g(x) = \frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$

θ) $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

ι) $g(x) = \alpha^{f(x)} \cdot f'(x)$, με $0 < \alpha \neq 1$.

2. Σε κάθε μία από τις επόμενες περιπτώσεις να βρείτε τις παράγουσες $F(x)$ των συναρτήσεων $f(x)$. Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις f είναι ορισμένες σε διάστημα Δ (όχι σε ένωση διαστημάτων).

α) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

β) $f(x) = \frac{x e^x - 1}{x}$

γ) $f(x) = x(2 \ln x + 1)$

δ) $f(x) = \varepsilon\varphi x + \frac{x}{\sin^2 x}$

ε) $f(x) = \frac{2x \eta\mu x - x^2 \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

στ) $f(x) = \frac{x e^x \ln x - e^x}{x \ln^2 x}$

ζ) $f(x) = \frac{1}{x \sqrt{1 + \ln x}}$

η) $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$

θ) $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$

ι) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

3. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \frac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$$

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f(1) = 1$ και $xf'(x) - f(x) = x \ln^2 x$, για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

5. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο διάστημα $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει :

$$\frac{df(x)}{dx} \cdot e^{f(x)} = 3x^2 + 2x \text{ και η εφαπτομένη της } C_f$$

στο $M(2, f(2))$ έχει συντελεστή $\lambda = \frac{4}{3}$.

Εύρεση παραγουσών μιας πολλαπλού τύπου συνάρτησης f

μορφής $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$.

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 .
- Βρίσκουμε τις παράγουσες κάθε κλάδου ξεχωριστά, ώστε να είναι :

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) + c_1, & x \leq x_0 \\ F_2(x) + c_2, & x > x_0 \end{cases}$$

- Προσοχή όμως η F είναι **παραγωγίσιμη**, άρα και **συνεχής** στο x_0 .

- Είναι έτσι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x),$$

οπότε βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των c_1 και c_2 και έχουμε τις παράγουσες της f .

6. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$ και F μια αρχική της f για την οποία ισχύει: $F(x)f(-x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε το $F(0)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- γ) Να βρείτε τον τύπο της f .
7. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, μια συνεχής και άρτια συνάρτηση. Αν F είναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι και η $G(x) = -F(-x)$ είναι αρχική της f στο $\mathbb{R}$.
8. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με συνεχή παράγωγο. Αν ισχύει $f(0) = 2$ και $f'(\ln x) = 3x$, να βρείτε τον αριθμό $f(1)$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 7$ και F είναι μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει:
- $$F(x) = xf(x) - 2x^3 \text{ για κάθε } x > 0$$
- Να βρείτε:
- α) τον τύπο της f ,
- β) τη μορφή των παραγουσών της $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
10. Να αποδείξετε ότι όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες $f'(x) = f(x)$ και $f(x) \neq 0$, έχουν μορφή $f(x) = \kappa e^x$.
Στη συνέχεια να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $(0, \pi)$ και ισχύει $f'(x) \eta \mu x - f(x) \sigma \upsilon \nu x = f(x) \eta \mu x$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.
11. Έστω F αρχική συνάρτηση της συνεχούς συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$. Αν η F δεν είναι $1-1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα τουλάχιστον σε ένα σημείο.
12. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, F είναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$, για την οποία ισχύει:
- $$2xF(x) + x^2 f(x) = 4x^3 - f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Να βρείτε:
- α) τον τύπο της f ,
- β) την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

13. Έστω μη σταθερή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x+y) = e^{xy} f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο 0, με $f'(0) = 0$.
Να δείξετε ότι $f(0) = 1$ και να βρεθεί ο τύπος της f .
14. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 2$ και F μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει : $F(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x$ για κάθε $x > 0$.
- α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_F στο σημείο της $M(1, F(1))$.
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x) f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$
- γ) Να βρείτε τον τύπο της f .
15. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f(x) F(1-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x) f(1-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- β) Να βρείτε τον τύπο της f .
16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω επίσης F μια αρχική συνάρτηση της f , για την οποία ισχύει :
- $$F(1-2x) + F(x^2+2) = x^4 + 5x^2 + 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(3)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, 0)$, με $x_0 \in (1, 3)$.
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ώστε :

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} = 2$$