

Μέθοδοι ολοκλήρωσης για ορισμένα ολοκληρώματα

13
No

Στα επόμενα παρουσιάζουμε τις τρεις βασικές μεθόδους ολοκλήρωσης των ορισμένων ολοκληρωμάτων.

1. Παραγοντική ολοκλήρωση :

Για δύο συναρτήσεις f, g με f' και g' να είναι συνεχείς στο $[a, b]$ είναι :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Τύποι ορισμένων ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται με παραγοντική ολοκλήρωση είναι :

$$A = \int_a^b P(x)e^{kx+\lambda} dx,$$

$$B = \int_a^b P(x)\eta\mu(kx + \lambda)dx,$$

$$\Gamma = \int_a^b P(x)\sigma\upsilon\nu(kx + \lambda)dx,$$

όπου $P(x)$ είναι (συνήθως) πολυωνυμική συνάρτηση, με $k \neq 0$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.
Θεωρούμε μια αρχική συνάρτηση για την $e^{kx+\lambda}$, την $\eta\mu(kx + \lambda)$ και την $\sigma\upsilon\nu(kx + \lambda)$ οπότε :

$$A = \int_a^b P(x)\left(\frac{1}{k}e^{kx+\lambda}\right)' dx = \left[P(x)\left(\frac{1}{k}e^{kx+\lambda}\right)\right]_a^b - \int_a^b P'(x)\left(\frac{1}{k}e^{kx+\lambda}\right) dx.$$

$$B = \int_a^b P(x)\left(-\frac{1}{k}\sigma\upsilon\nu(kx + \lambda)\right)' dx = \left[P(x)\left(-\frac{1}{k}\sigma\upsilon\nu(kx + \lambda)\right)\right]_a^b - \int_a^b P'(x)\left(-\frac{1}{k}\sigma\upsilon\nu(kx + \lambda)\right) dx.$$

$$\Gamma = \int_a^b P(x)\left(\frac{1}{k}\eta\mu(kx + \lambda)\right)' dx = \left[P(x)\left(\frac{1}{k}\eta\mu(kx + \lambda)\right)\right]_a^b - \int_a^b P'(x)\left(\frac{1}{k}\eta\mu(kx + \lambda)\right) dx.$$

Προσοχή! Μπορεί να εφαρμοστεί η παραγοντική ολοκλήρωση **περισσότερες από μία** φορές αν το δεύτερο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί από την πρώτη εφαρμογή.

Επίσης για τους **τύπους** :

$$\Delta = \int_a^b \eta\mu(\gamma x + \delta)e^{kx+\lambda} dx,$$

$$E = \int_a^b \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta)e^{kx+\lambda} dx,$$

θεωρούμε μια αρχική της $e^{kx+\lambda}$ και εφαρμόζουμε δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση θεωρώντας και τη δεύτερη φορά μια αρχική της $e^{kx+\lambda}$, με $k, \gamma \neq 0$.
Επανεμφανίζεται το αρχικό ολοκλήρωμα Δ ή E και λύνουμε ως ολοκληρωτική εξίσωση ως προς E ή Δ . ($\gamma, \delta, k, \lambda \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_a^b \eta\mu(\gamma x + \delta)\left(\frac{1}{k}e^{kx+\lambda}\right)' dx = \left[\eta\mu(\gamma x + \delta)\left(\frac{1}{k}e^{kx+\lambda}\right)\right]_a^b - \int_a^b (\eta\mu(\gamma x + \delta))'\left(\frac{1}{k}e^{kx+\lambda}\right) dx = \\ &= \left[\eta\mu(\gamma x + \delta)\left(\frac{1}{k}e^{kx+\lambda}\right)\right]_a^b - \frac{\gamma}{k} \int_a^b \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta)e^{kx+\lambda} dx \quad (1), \end{aligned}$$

είναι επίσης :

$$\begin{aligned}
E &= \int_a^\beta \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta)(e^{kx+\lambda}) dx = \int_a^\beta \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right)' dx = \\
&= \left[\sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta - \int_a^\beta (\sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta))' \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) dx = \\
&= \left[\sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta + \frac{\gamma}{k} \int_a^\beta \eta\mu(\gamma x + \delta) e^{kx+\lambda} dx = \\
&= \left[\sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta + \frac{\gamma}{k} \Delta, \quad (2), \quad \text{οπότε η (2) στην (1) είναι :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[\eta\mu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta - \frac{\gamma}{k} \left[\sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta - \frac{\gamma^2}{k^2} \Delta \Rightarrow \\
\left(\frac{k^2 + \gamma^2}{k^2} \right) \Delta &= \left[\eta\mu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta - \frac{\gamma}{k} \left[\sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta \Rightarrow \\
\Delta &= \left(\frac{k^2}{k^2 + \gamma^2} \right) \left[\eta\mu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta - \left(\frac{k\gamma}{k^2 + \gamma^2} \right) \left[\sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) \left(\frac{1}{k} e^{kx+\lambda} \right) \right]_a^\beta.
\end{aligned}$$

Τέλος για τους τύπους :

$$Z = \int_a^\beta P(x) \ln(g(x)) dx,$$

$$H = \int_a^\beta \ln(g(x)) dx,$$

θεωρούμε μια αρχική της συνάρτησης $P(x)$ για το ολοκλήρωμα Z ή αν δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση όπως στο H , θεωρούμε μια αρχική συνάρτηση του $1 = (x)'$, οπότε :

$$H = \int_a^\beta \ln(g(x))(x)' dx = [x \ln(g(x))]_a^\beta - \int_a^\beta \frac{x g'(x)}{g(x)} dx.$$

2. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση :

Για συναρτήσεις f και g' που είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και με $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, $u_1 = g(a)$, $u_2 = g(\beta)$, είναι :

$$\int_a^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

Προσοχή! Συνήθως αντικαθιστούμε με u :

- παραστάσεις που είναι υψωμένες σε εκθέτη: παρ.1. $I = \int_0^1 (2x^2 - 8x + 1)^3 (x - 2) dx$,

θέτουμε $u = (2x^2 - 8x + 1)$, $du = (4x - 8)dx \Rightarrow \frac{1}{4} du = (x - 2)dx$, για $x = 0$ είναι $u = 1$,

για $x = 1$ είναι $u = -5$, οπότε $I = \frac{1}{4} \int_1^{-5} u^3 du = -\frac{1}{4} \left[\frac{u^4}{4} \right]_{-5}^1 = \dots$

- παραστάσεις σε παρονομαστή: παρ.2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$,
θέτουμε $u = x^2 - 3x + 2$, $du = (2x-3)dx, \dots$
- παραστάσεις σε υπόριζα: παρ.3. $\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$, θέτουμε $u = x + 1$,
 $du = dx$ και $x = u - 1$, ...
- παραστάσεις σε τριγωνομετρικές: παρ.4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu 3x dx$, θέτουμε $u = 3x$,
 $du = 3dx$, ...
- παραστάσεις σε εκθέτη εκθετικής συνάρτησης: παρ.5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x} dx$,
θέτουμε $u = \eta\mu x$, $du = \sigma\upsilon\nu x dx$, ...
- παραστάσεις σε λογάριθμο: παρ.6. $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$,
θέτουμε $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$, ...

ΓΕΝΙΚΑ : (με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις για τις παραμέτρους $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho$)

- $\int_{\alpha}^{\beta} \Pi(x, (\kappa x + \lambda)^{\nu}) dx$, $\nu \in \mathbb{Z}$, όπου Π : παράσταση των x , $(\kappa x + \lambda)^{\nu}$,
θέτουμε $u = \kappa x + \lambda$, ενώ $x = \frac{u - \lambda}{\kappa}$, ...
- $\int_{\alpha}^{\beta} \Pi(x, \sqrt[\nu]{(\kappa x + \lambda)^{\mu}}) dx$, $\nu, \mu \in \mathbb{N}^*$, θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{(\kappa x + \lambda)^{\mu}} \Rightarrow \kappa x + \lambda = u^{\nu/\mu}$, ...
- $\int_{\alpha}^{\beta} \Pi(x, \sqrt[\rho]{\kappa x + \lambda}, \sqrt[\mu]{\kappa x + \lambda}) dx$, $\rho, \mu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, αν το Ε.Κ.Π. $(\rho, \mu) = \nu$, τότε
θέτουμε $u = \sqrt[\nu]{\kappa x + \lambda} \Rightarrow \kappa x + \lambda = u^{\nu}$, $\sqrt[\rho]{\kappa x + \lambda} = u^{\nu/\rho}$ και $\sqrt[\mu]{\kappa x + \lambda} = u^{\nu/\mu}$, ...

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ - ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

- $\int_{\alpha}^{\beta} \Pi(e^{f(x)}, \eta\mu(e^{g(x)})) dx$, θέτουμε $u = e^{g(x)}$, $du = e^{g(x)} g'(x) dx$, ... κατόπιν
εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση παρ.7. $\int_0^1 e^{3x} \eta\mu(e^x) dx \dots$
- $\int_{\alpha}^{\beta} \Pi(e^{f(x)}, \sigma\upsilon\nu(e^{g(x)})) dx$, λύνουμε ομοίως με το προηγούμενο ολοκλήρωμα.

3. Ολοκλήρωση με απλά κλάσματα :

Για τύπους ορισμένων ολοκληρωμάτων μορφής

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\kappa x + \lambda}{\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon} dx, \text{ με } \gamma \neq 0 \text{ και } \Delta = \delta^2 - 4\gamma\varepsilon > 0, \text{ οπότε } x_1, x_2 \text{ οι ρίζες του}$$

παρονομαστή και τότε $\frac{\kappa x + \lambda}{\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$, οπότε :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{A}{x - x_1} dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{B}{x - x_2} dx \quad (\text{κατόπιν μπορεί να εφαρμοστεί και μέθοδος αντικατάστασης})$$

$$K = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \text{ με } Q(x) \text{ δευτεροβάθμιο πολυώνυμο και } P(x) \text{ πολυώνυμο}$$

ίσου ή μεγαλύτερου βαθμού του δευτεροβάθμιου, πριν εφαρμόσουμε τη μέθοδο των απλών κλασμάτων πρέπει να προηγηθεί η διαίρεση $P(x) : Q(x)$ ώστε

$$P(x) = Q(x) \pi(x) + u(x), \text{ άρα } \frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{u(x)}{Q(x)}, \text{ με βαθμό } u(x) < \text{βαθμού } Q(x),$$

$$\text{άρα : } K = \int_{\alpha}^{\beta} \pi(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u(x)}{Q(x)} dx. \quad (\text{για το δεύτερο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε μέθοδο απλών}$$

κλασμάτων)

Το K ολοκλήρωμα μπορεί να είναι γενικά νιοστού βαθμού και να παραγοντοποιείται σε n πρωτοβάθμιους παράγοντες ώστε να εφαρμόζεται η παραπάνω μέθοδος απλών κλασμάτων.

Ασκήσεις

ΑΝΑΛΥΣΗ

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

13

No

1. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_0^1 x e^{-x} dx \quad \beta) \int_0^1 \frac{x^2 - 2x}{e^{-x}} dx \quad \gamma) \int_0^1 \frac{x - 2}{e^{2x}} dx \quad \delta) \int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}} dx$$

$$\epsilon) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \sigma\tau) \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \quad \zeta) \int_1^e x \ln x dx \quad \eta) \int_1^e \ln^2 x dx$$

$$\theta) \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + \ln x}} dx \quad \iota) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx \quad \iota\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 1) \eta \mu 2x dx$$

$$\iota\beta) \int_0^1 e^x \eta \mu x dx \quad \iota\gamma) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon \phi x dx \quad \iota\delta) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} dx$$

2. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\eta \mu x} dx$$

$$\beta) \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\gamma) \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$$

$$\delta) \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx$$

$$\epsilon) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$$

$$\sigma\tau) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x dx$$

$$\zeta) \int_0^1 \frac{6x + 7}{3x + 2} dx$$

$$\eta) \int_0^1 \frac{2x^2 + x + 1}{x + 3} dx$$

$$\theta) \int_1^2 \frac{x + 2}{x^2 + x} dx$$

$$\iota) \int_3^4 \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx$$

$$\iota\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$$

$$\iota\beta) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$\iota\gamma) \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$\iota\delta) \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$\iota\epsilon) \int_0^1 x \sqrt{x + 1} dx$$

3. Να λύσετε την εξίσωση $\int_e^x \frac{du}{u \ln^2 u} = \frac{1}{2}$.

(Απ. $x = e^2$)

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.
Αν $f(\beta) = g(\beta) = 0$ και $f'(\alpha) = g'(\alpha)$, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f''(x)g(x) - f(x)g''(x))dx = f'(\alpha)(f(\alpha) - g(\alpha))$$

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^{2\kappa} f(x)dx = \int_0^{\kappa} [f(x) + f(2\kappa - x)]dx$$

6. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu x f(x)dx = f(x) + 2\eta \mu x$$

(Απ. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} - 2\eta \mu x$)

7. A. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα $[α, β]$ με συνεχή πρώτη παράγωγο στο ίδιο διάστημα. Η f^{-1} είναι επίσης συνεχής στο $[f(α), f(β)]$.

Να δείξετε ότι :

$$\int_{f(α)}^{f(β)} f^{-1}(x) dx = \int_{α}^{β} x f'(x) dx .$$

- B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-3}^{e-1} f^{-1}(x) dx$.

8. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και f^{-1} και η f^{-1} συνεχής

στο $[α, β]$. Να δείξετε ότι :

$$\int_{α}^{β} f(x) dx + \int_{f(α)}^{f(β)} f^{-1}(x) dx = βf(β) - αf(α).$$

9. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$f^3(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x) dx$.

10. Έστω η συνάρτηση $f : [-α, α] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι :

α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-α}^{α} f(x) dx = 2 \int_0^{α} f(x) dx$.

β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-α}^{α} f(x) dx = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx$.

11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(1-x) + f(1+x) = 2, \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 f(x) dx$.

Επιμέλεια : Π. Δ. Τρίμης
Μαθηματικός