

Αναγωγικός τύπος ολοκληρώματος

14
No

Αν δίνεται ολοκλήρωμα με ολοκληρωτέα συνάρτηση η οποία είναι υψωμένη σε νιοστή δύναμη με $n \in \mathbb{N}$ ή ένας παράγοντας αυτής να είναι υψωμένος σε νιοστή δύναμη και ζητείται να αποδειχθεί σχέση στην οποία εμφανίζεται ολοκλήρωμα με την ίδια ολοκληρωτέα συνάρτηση σε, συνήθως, μικρότερη δύναμη.

Π.χ. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι :

$$I_n = -\frac{n+1}{e} + n(n-1) I_{n-2}, \text{ για κάθε } n > 2.$$

Δηλ. αρκεί να δείξουμε ότι $\int_0^1 x^n e^{-x} dx = -\frac{n+1}{e} + n(n-1) \int_0^1 x^{n-2} e^{-x} dx$, πράγματι

$$\begin{aligned} \text{είναι } \int_0^1 x^n e^{-x} dx &= \int_0^1 x^n (-e^{-x})' dx = [x^n (-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 (x^n)' (-e^{-x}) dx = \\ &= - (e^{-1}) + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + n \left\{ \int_0^1 x^{n-1} (-e^{-x})' dx \right\} = \\ &= -\frac{1}{e} + n \left\{ [x^{n-1} (-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 (x^{n-1})' (-e^{-x}) dx \right\} = \\ &= -\frac{1}{e} + n \left\{ - (e^{-1}) + (n-1) \int_0^1 x^{n-2} e^{-x} dx \right\} = \\ &= -\frac{1}{e} - \frac{n}{e} + n(n-1) \int_0^1 x^{n-2} e^{-x} dx = -\frac{n+1}{e} + n(n-1) \int_0^1 x^{n-2} e^{-x} dx. \text{ Αποδείχθηκε.} \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε επίσης το ολοκλήρωμα I_3 .

$$\begin{aligned} \text{Είναι } I_3 &= -\frac{3+1}{e} + 3(3-1) I_1 = -\frac{4}{e} + 6 \int_0^1 x e^{-x} dx = -\frac{4}{e} + 6 \int_0^1 x (-e^{-x})' dx = \\ &= -\frac{4}{e} + 6 \left\{ -[x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 (x)' e^{-x} dx \right\} = -\frac{4}{e} - 6(e^{-1}) + 6 \int_0^1 e^{-x} dx = \\ &= -\frac{4}{e} - \frac{6}{e} - 6 [e^{-x}]_0^1 = -\frac{10}{e} - 6(e^{-1} - e^0) = -\frac{10}{e} - \frac{6}{e} + 6 = -\frac{16}{e} + 6. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα υπολογίσαμε ότι } I_3 = -\frac{16}{e} + 6.$$

Οι αναγωγικοί τύποι εφαρμόζονται και σε αόριστα ολοκληρώματα

Ακολουθούν σχετικές ασκήσεις στην επόμενη σελίδα :

Ασκήσεις

ΑΝΑΛΥΣΗ
3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ14
No

1. Αν $I_v = \int_1^e (\ln x)^v dx$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι για

$$\text{κάθε } v \geq 2 \text{ ισχύει : } I_v = [x(\ln x)^v]_1^e - v I_{v-1}.$$

$$\text{Να υπολογίσετε επίσης το } I_3 = \int_1^e (\ln x)^3 dx.$$

2. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I_v = \int_{-1}^1 (1-x^2)^v dx$, ικανοποιεί τη σχέση

$$I_v = \frac{2v}{2v+1} I_{v-1} \text{ για κάθε } v \geq 2 \text{ με } v \in \mathbb{N}^*.$$

3. Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^v x dx$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι για κάθε $v \geq 3$ ισχύει

$$I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}.$$

Να υπολογίσετε το I_3 .

4. Αν είναι $A_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^v x}$, ($v \in \mathbb{N}$), να δείξετε ότι

$$(v-1)A_v = \left[\frac{\varepsilon\varphi x}{\sin^{v-2} x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + (v-2)A_{v-2}, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}^*, \text{ με } v \geq 2.$$

5. Έστω ότι $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^v \eta\mu x dx$ για κάθε $v \in \mathbb{N}$, να δείξετε ότι για κάθε $v \geq 2$

$$\text{ισχύει } I_v = v \left(\frac{\pi}{2} \right)^{v-1} - v(v-1)I_{v-2}.$$

Να βρείτε την τιμή του I_2 .

Επιμέλεια
Π. Δ. Τρίμης
Μαθηματικός