

ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Π. Δ. ΤΡΙΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣΑΝΑΛΥΣΗ
3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ασκήσεις

(ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ)

14β
No

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ - ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ανισοτική σχέση μορφής :

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

- Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$.
- Ελέγχουμε το πρόσημο της h στο $[a, b]$.
- Αν είναι $h(x) \geq 0$, τότε και $\int_a^b h(x)dx \geq 0$, δηλ. ,

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0 \text{ οπότε } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

- **Προσοχή!** Το πρόσημο της h μπορεί να ελεγχθεί και με τη μονοτονία της h ή τα ακρότατά της (αν αυτά υπάρχουν)
- Μπορεί επίσης πριν τον έλεγχο του προσήμου η ανίσωση $f(x) \geq g(x)$ να χρειάζεται μετασχηματισμό.

Ανισοτική σχέση μορφής :

$$\gamma \leq \int_a^b f(x)dx \leq \delta$$

- Ισχύει η σχέση $a \leq x \leq b$ εξετάζουμε αν μπορούμε την ισχύ της σχέσης $m \leq f(x) \leq M$ (κατασκευαστικά)
- Μπορούμε να μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία ή τα ακρότατά της.

$$\text{• Ισχύει τότε } \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \leq \int_a^b f(x)dx \leq \delta.$$

1. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln x^2 dx \geq \int_1^e \ln^2 x dx.$

2. Να αποδείξετε ότι $\frac{e^2 - 1}{e^3} \leq \int_e^{e^2} \frac{x + \ln^2 x}{x^2} dx \leq \frac{e^3 - e^2 + 4e - 4}{e}.$

3. Να υπολογίσετε το $\int_a^b f(x) dx$, όταν $f(x) > 0$,
για κάθε $x \in [a, b]$, η f είναι συνεχής στο $[a, b]$

και ισχύει : $\int_a^b f(x) \left[\int_a^b f(x) dx \right] dx = \int_a^b f(x) dx + 6.$

Προσοχή :

Το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)dx \text{ είναι σταθερός αριθμός}$$

και όχι μεταβλητή συνάρτηση ως προς x .

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι :

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx .$$

Προσοχή :

Γενικά ισχύει

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx ,$$

για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, για την οποία είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\kappa^2 f(x) + 2\kappa + \frac{1}{f(x)} \geq 0$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$,

β) $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{f(x)} dx \right) \geq (\beta - \alpha)^2 .$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες είναι συνεχείς. Να δείξετε ότι :

α) $t^2 \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx - 2t \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x) dx \geq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

β) $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x) dx .$

7. Δίνεται η συνάρτηση g παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0, 1]$, με $g(0) = 0$.

Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 g(x) dx \leq \frac{1}{2} g'(1)$.

8. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$, για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) > 2x e^{-x}$, για κάθε $x \in [0, 1]$, $f(0) = 0$ και $f(1) = \frac{2}{e}$.

Να αποδείξετε ότι : $2 - \frac{5}{e} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 3 - \frac{6}{e}$.

9. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{2\eta\mu x}{x^2 + 1} dx < \ln 2$.

10. Αν $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη το 3, να δείξετε ότι :
- $$\frac{3}{4} < \int_0^2 f(x) dx \cdot \int_0^2 \frac{1}{f(x)} dx < 12.$$

11. Έστω η συνάρτηση $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν :

- $f(x) \geq \frac{1}{x} + 1$, για κάθε $x \in [1, e]$ και

- $\int_1^e f(x) dx = e.$

Να βρείτε τον τύπο της f .

12. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν :

- $f(x) > 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

- $\int_0^{\alpha-1} f(x) dx = \alpha^2 - 2\alpha + 1$

Να βρείτε το α .

(απ. $\alpha = 1$)

13. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν :

- $f(0) = 0$ και

- $f'(x) > 2(x f(x) + e^{x^2})$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > e - 1.$

14. Έστω η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(1) = 2$.

Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx < 1.$

15. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν :

- $f(0) = 0$ και

- $f'(x) + 2x f(x) > 2e^{-x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx > \frac{e-1}{e}.$