

Εφαρμογές Ορισμένων Ολοκληρωμάτων - Εύρεση Εμβαδού χωρίου

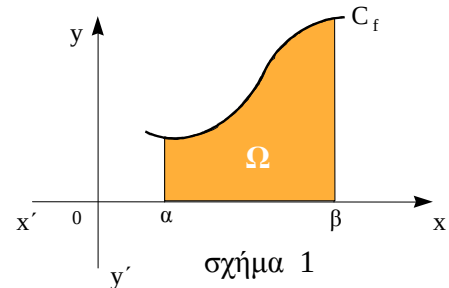
15
No

Αν f είναι συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε διάστημα

$[α, β]$ και $f(x) ≥ 0$, για κάθε $x ∈ [α, β]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E(\Omega)$,

όπου $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από την C_f τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

(βλέπε σχήμα 1)

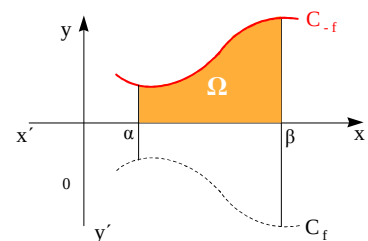


σχήμα 1

Ειδικές περιπτώσεις

α) Αν $f(x) ≤ 0$, για κάθε $x ∈ [α, β]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} (-f(x)) dx = E(\Omega)$,

αφού $-f(x) ≥ 0$. (βλέπε σχήμα 2)

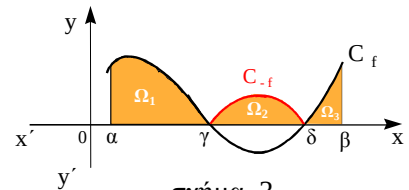


σχήμα 2

β) Αν $f(x)$ δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[α, β]$ τότε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} (-f(x)) dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x) dx =$$

$= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$ (βλέπε σχήμα 3) (Για κάθε $x ∈ [\gamma, \delta]$, χρησιμοποιούμε την $-f(x) ≥ 0$, αφού $f(x) ≤ 0$).



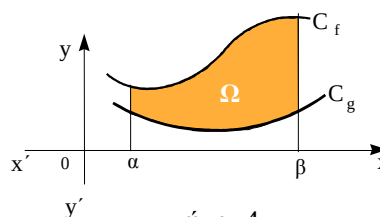
σχήμα 3

γ) Αν $f(x) ≥ g(x)$,

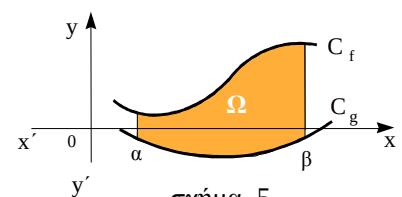
για κάθε $x ∈ [α, β]$, τότε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx,$$

(βλέπε σχήματα 4 και 5).



σχήμα 4



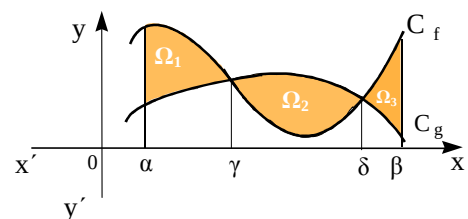
σχήμα 5

δ) Αν $f(x) ≥ g(x)$ στα διαστήματα $[α, \gamma]$ και $[\delta, \beta]$ και

$$f(x) ≤ g(x) \text{ στο } [\gamma, \delta], \text{ τότε } E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\gamma}^{\delta} (g(x) - f(x)) dx + \int_{\delta}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx =$$

$= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$, (βλέπε σχήμα 6)



σχήμα 6

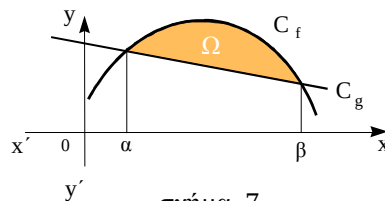
Σχόλια

1. Αν ζητείται να υπολογίσουμε το εμβαδό χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ δύο γραφικών παραστάσεων C_f, C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, τότε βρίσκουμε τα κοινά σημεία των C_f, C_g , λύνοντας την εξίσωση $f(x) = g(x)$ και καθορίζοντας το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$, ανάμεσα στα κοινά σημεία των C_f, C_g . Τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από τα κοινά σημεία των C_f, C_g .

Στο σχήμα 7 είναι $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα το

ζητούμενο εμβαδό $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx$. Προφανώς ισχύει ότι $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f(\beta) = g(\beta)$ και

συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.



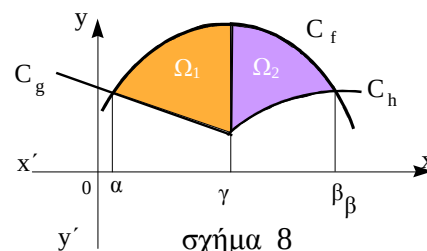
σχήμα 7

2. Σε περίπτωση όπου το χωρίο Ω , του οποίου το εμβαδό ζητάμε, περικλείεται από περισσότερες των δύο συναρτήσεων και κάθετων ευθειών, τότε το διαμερίζουμε σε απλούστερα χωρία $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ ώστε σε καθένα απ' αυτά να έχουμε μια μόνο συνάρτηση ως "άνω" σύνορο του χωρίου και μια μόνο ως "κάτω" σύνορο.

Στο σχήμα 8 το εμβαδό $E(\Omega)$ του χωρίου Ω από τις C_f, C_g, C_h ,

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\gamma}^{\beta} (f(x) - h(x)) dx.$$

Προφανώς ισχύει ότι $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \gamma]$, $f(x) \geq h(x)$, για κάθε $x \in [\gamma, \beta]$, $\alpha < \gamma < \beta$, $g(\gamma) = h(\gamma)$ και οι συναρτήσεις f, g, h να είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.



σχήμα 8

ΑΝΑΛΥΣΗ

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Ασκήσεις

(Σε όλες τις ασκήσεις να σχεδιαστεί το αντίστοιχο χωρίο Ω , πριν τον υπολογισμό του αντίστοιχου εμβαδού $E(\Omega)$).

15

No

1. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = x^2 + 1$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.
2. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ και τον άξονα $x'x$.
3. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 4$.
4. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f με $f(x) = 2x + 1$, τους άξονες $x'x, y'y$ και την ευθεία $x = 1$.
5. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = e^x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

6. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = \sqrt{x}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 4$.
7. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = \eta\mu x$, τον άξονα $x'x$ και για κάθε $x \in [0, \pi]$.
8. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = \ln x$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = e$.
9. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f με $f(x) = x^2 + 1$ και τις ευθείες με εξισώσεις $y = 1$ και $x = 1$.
10. α) Να δείξετε ότι ισχύει : $\sqrt{x} \geq x$, για κάθε $0 \leq x \leq 1$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = \sqrt{x}$ και την C_g αν $g(x) = x$, για κάθε $0 \leq x \leq 1$.
11. α) Να δείξετε ότι ισχύει : $x \geq x^2$, για κάθε $0 \leq x \leq 1$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_h αν $h(x) = x^2$ και την C_g αν $g(x) = x$, για κάθε $0 \leq x \leq 1$.
 γ) Να δείξετε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$, της άσκησης 10 και η $h(x)$ είναι αντίστροφες και το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τη C_f και τη C_h είναι διπλάσιο του $E(\Omega)$.
12. α) Να δείξετε ότι ισχύει : $x^2 + 1 \geq 2x^2$, για κάθε $-1 \leq x \leq 1$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = x^2 + 1$ και την C_g αν $g(x) = 2x^2$.
13. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = x^2 + 1$, την C_g αν $g(x) = 2x^2$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 2$.
14. α) Να δείξετε, ότι για κάθε $x \geq 0$, η συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x$, είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \geq 0$.
 γ) Να δείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.
 δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τη C_g με $g(x) = \ln x$, την ευθεία $\varepsilon : y = x - 1$ και την ευθεία $x = e$.
 ε) Να υπολογίσετε την τιμή του λ , $\lambda > 1$, ώστε το εμβαδόν του χωρίου Ω_2 που περικλείεται από τη C_h με $h(x) = e^x$, την ευθεία $\varepsilon_1 : y = \lambda$ και την ευθεία $\varepsilon_2 : y = x + 1$, είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 .

15. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = \frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = 2$.
16. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $y = \frac{1}{2}$.
17. α) Να δείξετε ότι $x \geq \frac{1}{x}$, για κάθε $x \in [1, 2]$.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = x$, τη C_g με $g(x) = \frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 2$.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = x$, τη C_g με $g(x) = \frac{1}{x}$, και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$ και $x = 2$.
18. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = |x|$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.
19. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f αν $f(x) = x^3$, τη C_g με $g(x) = x$.
20. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{x^2}$, για $x > 0$.
- α) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_1(\lambda)$ του χωρίου Ω_1 , που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x = 1$ και την ευθεία $x = \lambda$, με $\lambda > 1$.
- β) Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx$.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_2(\lambda)$ του χωρίου Ω_2 , που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία $y = 1$ και την ευθεία $x = \lambda$, με $0 < \lambda < 1$.
- δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E_2(\lambda)$.
- ε) Αφού σχεδιάσετε τα χωρία Ω_1, Ω_2 , να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (β) και (δ).