

Ανάλυση

Γ' λυκείου

θετικού
προσανατολισμού
και οικονομίας
πληροφορικής

3ο ΘΕΜΑ

1.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x - 1)^3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$.

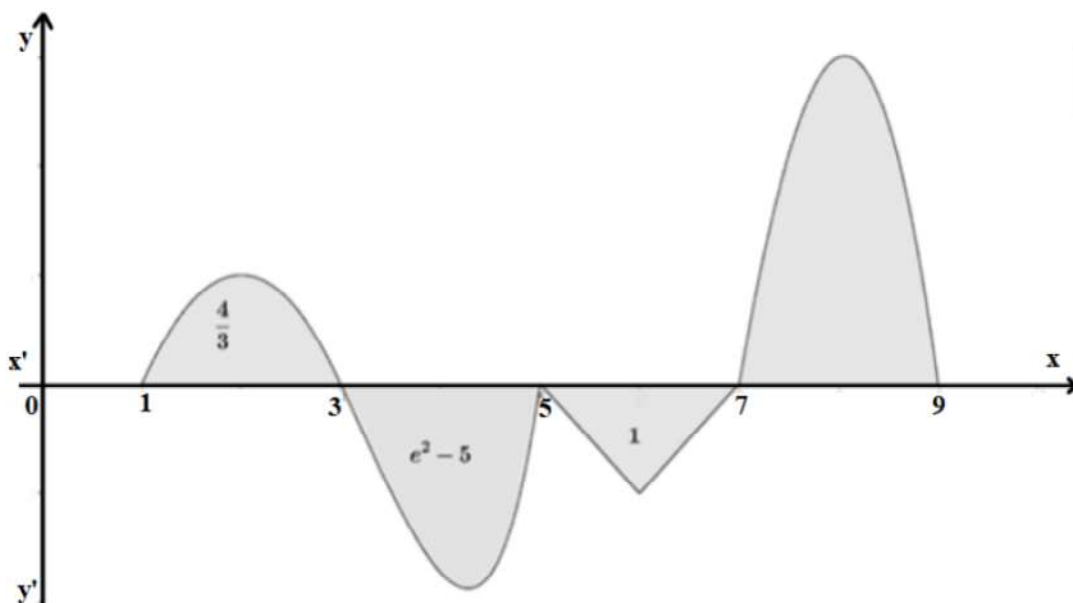
(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

2.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1, 7]$.



Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x) dx \right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες 1, 3, 5, 7.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x) dx = 4$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1, 9]$.

(Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x) dx$.

(Μονάδες 08)

3.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2$, $x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

4.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} .

(Μονάδες 7)

β)

i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.

(Μονάδες 6)

5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

(Μόρια 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

(Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f , διαφορετικό από το A , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε) .

(Μόρια 8)