

Ανάλυση

Γ' λυκείου

Θετικού
προσανατολισμού
και οικονομίας –
πληροφορικής

3ο ΘΕΜΑ

Λύσεις

1.

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = ((x-1)^3 - 3x)' = 3(x-1)^2 - 3 = 3x^2 - 6x + 3 - 3 = 3x(x-2)$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Άρα, η συνάρτηση f είναι:

- ο γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$.
- ο γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0, 2)$.
- ο γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[2, +\infty)$, οπότε:

$$f([2, +\infty)) = [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-5, +\infty)$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

γ) Παρατηρούμε ότι $0 \in f([2, +\infty))$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό.

2.

α) Έχουμε $\left(\int_7^9 f(x)dx\right)^2 = 16 \Leftrightarrow \int_7^9 f(x)dx = 4$ ή $\int_7^9 f(x)dx = -4$. Η συνεχής συνάρτηση f είναι μη αρνητική στο διάστημα $[7,9]$ και δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, άρα $\int_7^9 f(x)dx > 0$. Συνεπώς $\int_7^9 f(x)dx = 4$.

β) Το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με: $\frac{4}{3} + e^2 - 5 + 1 + \int_7^9 f(x)dx = \frac{4}{3} + e^2 - 4 + 4 = \frac{3e^2 + 4}{3}$ τ.μ.

γ) Γνωρίζουμε ότι το $\int_1^9 f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x ' x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x ' x .

Άρα

$$\int_1^9 f(x)dx = \left(\frac{4}{3} + 4\right) - (e^2 - 5 + 1) = \frac{28}{3} - e^2.$$

3.

α) Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,2]$, είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, με $f'(x) = 4x^3 - 4$ για κάθε $x \in [0,2]$. Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Επομένως, η f έχει ένα μόνο κρίσιμο σημείο, το $x_0 = 1$.

β) Γνωρίζουμε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και του ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f .
- Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα του διαστήματος.
- Από αυτές τις τιμές, η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f .

Οι τιμές της f στο κρίσιμο σημείο της $x_0 = 1$ και στα άκρα του διαστήματος $[0,2]$ είναι

$$f(1) = -1, f(0) = 2 \text{ και } f(2) = 10.$$

Άρα, η μέγιστη τιμή της f στο $[0,2]$ είναι ίση με 10 και η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,2]$ είναι ίση με -1 .

4.

α)

- i. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$. Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και ένα προς ένα, οπότε είναι αντιστρέψιμη.

- ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) = y \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}, y \in \mathbb{R}$.

Οπότε $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β)

- i. Είναι $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$ θέλουμε :

$$\{x \in D_{g^{-1}} \text{ και } g^{-1}(x) \in D_f\} \text{ ή}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{x+1}{2} \in (2, +\infty)\} \text{ ή}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{x+1}{2} > 2\} \text{ ή } x > 3.$$

- ii. Για κάθε $x \in (3, +\infty)$ έχουμε :

$$(f \circ g^{-1})(x) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{2} - 2\right) + 5 = \ln\left(\frac{x+1-4}{2}\right) + 5 = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right) + 5.$$

5.

α) Η συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 4x^3 + 6x \text{ και } f''(x) = 12x^2 + 6, x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) = 6(2x^2 + 1) > 0$, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) i. Η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο A έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(1) = 10$ και εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 4 = 10(x - 1) \Leftrightarrow y = 10x - 14$$

ii. Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι η συνάρτηση $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1» οπότε για κάθε $x \neq 1$ ισχύει

$$f'(x) \neq f'(1) \Leftrightarrow f'(x) \neq 10$$

Επομένως δεν υπάρχει σημείο της C_f διαφορετικό από το A στο οποίο η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ).