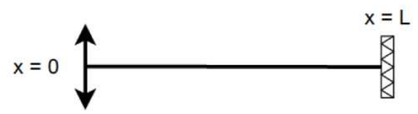
Λεπτή ατσάλινη χορδή έχει μήκος $L = \frac{7}{4}\ m$ και έχει τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα x. Η χορδή διεγείρεται με κατάλληλη διάταξη σε ταλάντωση με το ένα της άκρο σταθερό στο σημείο $x = L$ ενώ το άλλο άκρο είναι ελεύθερο στο $x = 0$.



4.1. Να δείξετε ότι οι συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης της χορδής που μπορούμε να πετύχουμε με την κατάλληλη διάταξη κάθε φορά για να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα είναι:

$$f = \frac{v}{4L}(2n+1)$$

Όπου v είναι η ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στη χορδή, και n ακέραιος αριθμός. Δηλαδή οι τιμές των συχνοτήτων θα είναι:

$$f_1 \quad , \quad 3 \cdot f_1 \quad , \quad 5 \cdot f_1 \quad , \quad 7 \cdot f_1 \quad , \ldots . \text{ όπου } f_1 = \frac{v}{4L}$$

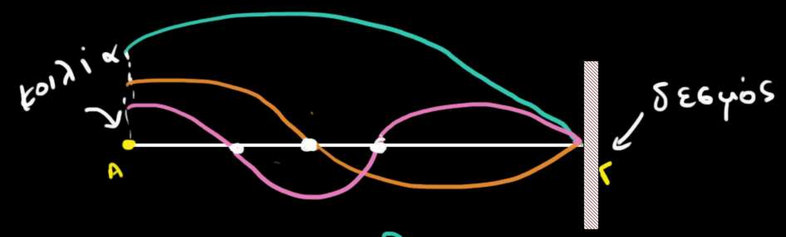
Μονάδες 7

4.2. Αν δίνεται ότι $f_1 = 50\ Hz$, να βρείτε το αντίστοιχο μήκος κύματος λ_1 του εγκάρσιου κύματος το οποίο όταν διαδίδεται στην χορδή, δημιουργεί, λόγω της ανάκλασής του στο δεσμευμένο άκρο, στάσιμο κύμα. **Μονάδες 7**

4.3. Να υπολογίσετε την σταθερή ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων στα οποία οφείλεται το στάσιμο κύμα. **Μονάδες 6**

Στη συνέχεια, με την κατάλληλη διάταξη, στην χορδή διαδίδεται κύμα με συχνότητα $f_7 = 7 \cdot f_1 = 350\ Hz$.

4.4. Να γράψετε (στο $S.I.$) την εξίσωση του στάσιμου κύματος για συχνότητα πηγής ίση με f_7. Δίνεται ότι η μέγιστη απομάκρυνση ενός σημείου της χορδής που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{\lambda}{8}$ είναι $2\sqrt{2}$ cm. **Μονάδες 5**



$n=0 \quad \leftarrow L = \frac{\lambda}{4} \rightarrow$

$n=1 \quad \leftarrow L = \frac{3\lambda}{4} \rightarrow$

$n=2 \quad \leftarrow L = \frac{5\lambda}{4} \rightarrow$

Γενικά $L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$

$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{2n\lambda}{4}$

$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ $n \geq 0$ $\rightarrow \lambda = \frac{4L}{2n+1}$

όμως $v = \lambda \cdot f \Rightarrow v = \frac{4L}{2n+1} \cdot f \Rightarrow f = \frac{v}{4L}(2n+1)$

$n=0: f_0 = \frac{v}{4L}$

$n=1: f_1 = \frac{3}{4}\frac{v}{L}$

4.2 Αφού $f_1 = 50Hz \Rightarrow \frac{v}{4L} = 50 \Rightarrow v = 50 \cdot 4 \cdot \frac{7}{4} \Rightarrow v = 350\frac{m}{s}$

$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \overset{n=0}{\Rightarrow} L = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 7m \quad (n=0)$

4.3

Αφού $x = \frac{\lambda}{8} = \frac{1}{8} \rightarrow A = 2\sqrt{2}\ cm$

$2A\sigma\upsilon\nu 2\pi x \frac{\lambda}{8} = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-2}$

$2A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \Rightarrow$

$2A\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \left(\frac{A}{2} = 10^{-2}\right)$

$A = 2 \cdot 10^{-2}\ m \quad A = 2 \cdot 10^{-2} m$

$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi\frac{t}{T}$

$y = 4 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu 2\pi x \cdot \eta\mu 700\pi t$

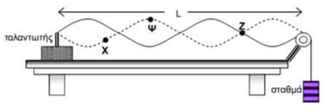
$U = \lambda_7 f_7 \Rightarrow 350 = \lambda_7 \cdot 350 \Rightarrow \lambda_7 = 1m$

$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi\frac{t}{T}$ $\times$ (2)

(2) $\Rightarrow$

* 4.4 $f_7 = 7f_1 = 350Hz$

Για τη μελέτη των στάσιμων κυμάτων κατά μήκος τεντωμένης χορδής δημιουργήθηκε στο εργαστήριο η πειραματική διάταξη του παρακάτω σχήματος. Αποτελείται από έναν ταλαντωτή, μία τροχαλία, μία αβαρή ελαστική χορδή και διάφορα σταθμά. Ο ταλαντωτής συνδέεται με μία γεννήτρια συχνοτήτων. Όταν η χορδή ηρεμεί έχει μήκος $L = 1,6\,m$. Η γεννήτρια τίθεται σε λειτουργία και ρυθμίζουμε την συχνότητά της ώστε να σχηματιστεί το στάσιμο κύμα του παρακάτω σχήματος.



Τα σημεία που συνδέεται η χορδή με τον ταλαντωτή και την τροχαλία, μετά τον σχηματισμό του στάσιμου κύματος θεωρούνται ακίνητα, δηλαδή συμπεριφέρονται όπως το σημείο Ζ. Η μέγιστη απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας των σημείων που βρίσκονται στις κοιλίες π.χ. το Ψ, είναι $4cm$. Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σημείο Χ για να κινηθεί από την μία ακραία θέση ταλάντωσης στην άλλη είναι $\Delta t = 0,1s$.

4.1. Να βρεθεί το μήκος κύματος των αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα στην χορδή καθώς και η ταχύτητα διάδοσης του αρμονικού κύματος στην χορδή.

Μονάδες 6

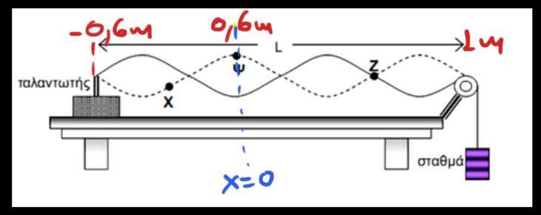
4.2. Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να μεταβληθεί η συχνότητα της γεννήτριας ώστε να σχηματιστεί στην χορδή ένα ακόμη σημείο δεσμού.

Μονάδες 6

4.3. Για την αρχική συχνότητα του ταλαντωτή να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος του παραπάνω σχήματος, καθώς και η εξίσωση που δίνει την επιτάχυνση ταλάντωσης των μορίων της χορδής σε συνάρτηση με τον χρόνο. Θεωρούμε ως $t = 0$ τη στιγμή που όλα τα μόρια της χορδής διέρχονται από την θέση ισορροπίας τους και η ταχύτητα του σημείου στην θέση Ψ είναι $\upsilon > 0$. Ορίζουμε την θέση του σημείου Ψ ως την αρχή του οριζόντιου άξονα με $x = 0$. Να θεωρήσετε ότι $\pi^2 = 10$.

Μονάδες 6

4.4. Για την αρχική συχνότητα του ταλαντωτή να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης των μορίων της χορδής του παραπάνω σχήματος τα οποία βρίσκονται στις θέσεις των κοιλιών, όταν βρεθούν σε απομάκρυνση $y = \sqrt{7}\,cm$ από την θέση ισορροπίας.



$L = 1,6\,m$
$A = 4 \cdot 10^{-2}\,m$
$\Delta t = 0,1\,s$

Από σχήμα: $L = 2\lambda$
$1,6 = 2\lambda$
$\boxed{\lambda = 0,8m}$

Αφού $\Delta t = 0,1s \Rightarrow \frac{T}{2} = 0,1 \Rightarrow T = 0,2s \rightarrow f = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{f = 5Hz}$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \upsilon = \lambda \cdot f \Rightarrow \boxed{\upsilon = 4\frac{m}{s}}$

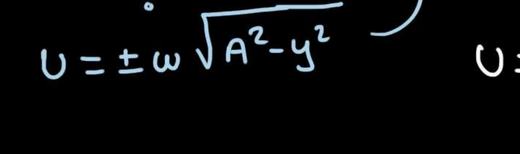
$\boxed{y = 4 \cdot 10^{-2}\,\sigma\upsilon\nu 2,5\pi x \cdot \eta\mu 10\pi t}$ $\quad \omega = 2\pi f = 10\pi$ $\quad (10^2)$

Για την εξίσωση επιτάχυνσης: $a = -\omega^2 \cdot y = -100\pi^2 \cdot y$

$\Rightarrow a = -10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 6\sigma\upsilon 2,5\pi x \cdot \eta\mu 10\pi t \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -40\,\sigma\upsilon 2,5\pi x \cdot \eta\mu 10\pi t$

4.2 Ζητάμε πόσο πρέπει να αλλάξω την f ώστε ένα έχουμε έναν επιπλέον δεσμό



Από το σχήμα: $L = 2\lambda' + \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow L = \frac{5\lambda'}{2}$

όπου λ' = το νέο πιθανό μήκος κύματος

Άρα: $1,6 = \frac{5\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{3,2}{5} \Rightarrow \lambda' = 0,64m$ $\xrightarrow{\upsilon = 6\pi\alpha\theta} 4\,m/s$

$\Rightarrow f' = \frac{\upsilon}{\lambda'} = \frac{4}{0,64} = \frac{4 \cdot 10^2}{64} = \frac{1}{16}100$

$\Rightarrow f' = 6,25Hz$ ✓

$\Delta f = 6,25 - 5 = 1,25Hz$ (αύξηση)

(ποσοστό αύξησης: $\frac{\Delta f}{f_{αρχ}} = \frac{1,25}{5} = 0,25$ ή 25%)

4.3 Για $f = 5Hz \rightarrow \lambda = 0,8m$

το πλάτος $2A = 4 \cdot 10^{-2}\,m$ $(2A)$

$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ (I)

με $x = 0$ την θέση του Ψ

$x_\Psi = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{3\lambda}{4} = \frac{3 \cdot 0,8}{4} = 0,6m$

με $-0,6 \le x \le +1m$

(I) $\Rightarrow y = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 6\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{0,8} \cdot \eta\mu 10\pi t$ $\quad (\frac{20}{8} = \frac{10}{4} = 2,5)$

$\boxed{y = 4 \cdot 10^{-2}\,\sigma\upsilon\nu 2,5\pi x \cdot \eta\mu 10\pi t}$

4.4 Για τα σημεία που είναι κοιλίες $(A = 4 \cdot 10^{-2}m)$ όταν βρίσκονται στην απομάκρυνση $y = \sqrt{7} \cdot 10^{-2}\,m$ πόση είναι η ταχύτητά τους

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}$ ΑΔΕΤ:

$K + U = U_{max}$

$\vdots$

$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}$

$\rightarrow \upsilon = \pm 10\pi \cdot \sqrt{16 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot 10^{-4}}$

$\upsilon = \pm 10\pi \cdot 10^{-2}\sqrt{9}$

$\upsilon = \pm 10^{-1}\pi \cdot 3 = \pm 3 \cdot 10^{-1}\pi$

$|\upsilon| = 0,3\pi\ m/s$